朝倉物理学大系
荒船次郎|江沢 洋|中村孔一|米沢富美子＝編集
7

量子力学の数学的構造 I

新井朝雄
江沢 洋
[著]

朝倉書店

編集

荒船次郎
東京大学教授

江沢　洋
学習院大学教授

中村孔一
明治大学教授

米沢富美子
慶應義塾大学教授

はじめに

力学は力と運動の科学である．極微の世界をさぐって，それは量子力学にゆきついた．そこでは，運動は点の位置の時間変化ではなかった．ニュートンが位置の時間微分として定立した速度は，運動の基本量であることをやめて，その地位を運動量にゆずった．そこで生まれた数学的構造が本書の主題である．

いま，運動の基本量といった．それはニュートン以来の力学—今日の，いわゆる古典力学—においては，質点の刻々の状態が当の質点の位置と速度の刻々の値で指定されるという意味であった．質点の（たとえば，彗星の）任意の一時刻における状態（位置と速度）を与えると，それに作用する力の法則（彗星の場合なら，万有引力の法則）が知れているとしてだが，以後の刻々の状態（位置と速度）は一意にきまってしまう．このように，状態概念は因果律にしっかり結びついていた．そして，ここから出発して古典力学の数学的構造は組み立てられた．

たしかに，力学は質点の位置と運動量を基本量にとって定式化することもできたのである．質点の刻々の状態は位置と運動量を座標軸とする相空間の一点で表現できる．実際，その任意の一時刻における位置を与えると，以後の刻々の位置はきまる．しかし，それをきめるハミルトン関数は基本的にはラグランジュ関数から導くのであって，後者は位置と速度の関数であった．古典力学の基本の基本は質点の位置とその時間変化であったといえるだろう．

量子力学にくると，質点の一時刻における状態は無限次元ヒルベルト空間の単位ベクトル ψ_t で表現される．その指す向きが時間 t とともに変ってゆく—これが質点の運動の表現になる．そして，質点の位置は，状態ベクトルに作用する演算子で表現される．運動量，またしかり．最早それらは古典力学におけるような数値ではない．質点の他の物理量—エネルギー，角運動量など—も演

算子で表わされるが，それらは位置と運動量の演算子から構成される．

具体的にいえば，一つの質点を対象とする場合，ヒルベルト空間としては R^3 で定義した L^2 関数 $\psi(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x} \in \mathsf{R}^3$ の全体をとり，位置座標の演算子 $\hat{\boldsymbol{X}}$ を $\hat{\boldsymbol{X}}\psi(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\psi(\boldsymbol{x})$ によって定義することができる．運動量の演算子 $\hat{\boldsymbol{P}}$ は位置座標の演算子 $\hat{\boldsymbol{X}}$ とともに $\hat{P}_k\hat{X}_l - \hat{X}_l\hat{P}_k = -i\hbar\delta_{kl}\hat{I}$（正準交換関係）をみたし自己共役たるべしというのが量子力学の公理の一つである．k，l はベクトルの直角座標成分を表わす．$\hat{I}$ は恒等演算子．たとえば，$\hat{P}_k = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_k}$ がこれをみたす．といっても，$\hat{\boldsymbol{P}}$ も $\hat{\boldsymbol{X}}$ も非有界な演算子であるから定義域が問題になり，それを自己共役性が実現されるように決定しなければならない．位置と運動量の演算子から他の物理量の演算子を構成する場合にも，同じことが問題になる．

しかし，質点の力学の表現はこれに限らない．いろいろの表現が可能である．それらを束ねて抽象的に表現することもできる．こうして数学的構造の問題がいっそう深まることになる．

物理にかえろう．位置座標が数値であることを止めてしまったとき，当の質点とは何であるのか？　この問いは，量子力学でいう質点を実験にかけるとは，どういうことか，という問いに発展する．そして古典的な描像で解釈するとき粒子と波動の二重性が現われる．波動性の状態 $\psi_t(\boldsymbol{x})$ で位置の観測を—精度 Δx，Δy，Δz で—すると確率 $|\psi_t(\boldsymbol{x})|^2\Delta x\Delta y\Delta z$ で位置 $\boldsymbol{x}$ の小体積の中に粒子が見いだされる．

こうして，われわれは古典的な直観には奇妙としか映らない世界像に導かれるが，その数学的構造は整然としている．量子力学は極微の世界を究めるなかで生まれたが，いまやニュートン力学の世界もある近似として包含し物理学全体の基礎理論とみなされるまでになっている．演算子の世界では位置座標の時間微分としての速度をはじめニュートン力学の諸関係も復活している．

量子力学の数学的構造を組み立てる素材は，上に説明したとおりヒルベルト空間と，そのベクトルに作用する演算子（作用素ともいう）である．本書は，その素材の解説からはじめて，量子力学を数学的に組み立ててゆく—その物理的背景を説明しながら！　そして，続く物理学大系・第 II 期に物理の主要な問題の

扱いを示す計画である．

『量子力学の数学的基礎』を J. von Neumann が書いたのは 1932 年．これは hypermaximal な演算子（今日の，いわゆる自己共役演算子）という概念を打ちたてて量子力学の数学的枠組みを提出した．その額縁に物理の絵を描き入れた最初は原子のエネルギー演算子が自己共役であることを証明した加藤敏夫（1944，公刊は戦争のため 1951）である．それ以来，量子力学の数学的構造の研究は大きく発展し，今日もなお発展を続けている．その背景には，摂動論に頼ってきた輻射と物質の相互作用の理論が強いレーザー光の登場によって変革を促されているなどの状況がある．問題は場の量子論の基礎におよび，極めて深い．かつては物理の側に演算子の自己共役性とエルミート性を区別しない時代もあったが，研究者も変ってきている．

いま，数学から物理への関心が急速に高まり，物理は数学の方法を取り入れることに熱心である．この交流の時代に，両者の間の橋をひろげ，対話と協力をいっそう盛んにするために本書が役立てば，と切に願っている．

1999 年 6 月

新井朝雄
江沢　洋

目　　次

第 II 巻目次

0
量子力学の形成

量子力学の歴史的な発展と特徴を概観し，本書の構成を述べる．

0.1 はじめに

量子力学 (quantum mechanics) は，Newton の力学を規範として発展してきた物理学が 20 世紀の初頭に原子の内部に迫って破綻したとき，それに代わる理論として創られた[*1]．そのあと着実に版図をひろげ，今日では素粒子から宇宙にいたる万象の基礎理論とみなされるようになってきた[*2]．これは，どの現象も究極的には素粒子の相互作用に還元して統一的にとらえようとする物理学の姿勢からして望ましい発展である．Newton の力学は，量子力学にある極限的な場合として含まれると考えられるようになってきたのである．

実は，その間に，量子力学は電磁場をはじめとする場を基本的な存在とし相対性理論に適合する形に育った．しかし，そこでは数学的に満足な形式が得られているとは言えないので[*3]，本書では範囲を非相対論的な（すなわち低エネルギーの）粒子の力学にかぎって，むしろ厳密に詳しく論ずる道をとろう．こ

[*1] 量子力学の形成の歴史は次の本に詳しい：天野　清『量子力学史』(中央公論社，1973)，高林武彦『量子論の発展史』(中央公論社，1977)，M. ヤンマー (M. Jammer)『量子力学史 1』(小出昭一郎 訳，東京図書，1974)，朝永振一郎『量子力学 1, 2』(みすず書房，第 2 版—1: 1969, 2: 1997)，また，江沢　洋『現代物理学』(朝倉書店，1996) にも参考になる部分があろう．

[*2] この発展については，江沢　洋・恒藤敏彦 編『量子物理学の展望—50 年の歴史に立って』(岩波書店，上: 1977, 下: 1978) を参照．序論が歴史的な展望を試みている．

[*3] 江沢　洋・新井朝雄『場の量子論と統計力学』(日本評論社，1988) や新井朝雄『場の量子論の数学的方法入門』(Lecture Note Series in Mathematics, Vol. 5, 大阪大学，1997) を参照．

こでは，数学的整備も進み，また実験的な基盤も強固になってきている．特に，量子力学があたえる，日常経験からの類推に反するような多くの命題が，近年の微細加工をはじめとする実験技術の進歩により次々と検証されていることは心強い[*4]．これらの命題は，かつては思考実験によってあれこれ論争されていたものである．

量子力学の誕生は物理学の革命といわれ，それまでの物理学は古典物理学（classical physics）とよばれるようになった．古典物理学は Newton の力学と Maxwell の電磁気学を主柱とし，Clausius の熱力学に支えられていた．

0.2 空 洞 輻 射

古典物理学の破綻は，すでに 19 世紀末から比熱の実験にその兆しを見せていた．気体の比熱に分子の回転運動から期待される寄与が現われず，金属の比熱には自由電子の寄与が理論値より桁外れに小さかった．破綻を決定的にしたのは，“真空” の比熱である．

たとえば，製鉄の溶鉱炉のように高温の炉のなかには，たとえそこが真空であったとしても電磁波（空洞輻射とよぶ）が満ちており，その単位体積あたりのエネルギー（空洞輻射のエネルギー密度） u は炉の温度 T の関数になる．$du(T)/dT$ が真空の単位体積あたりの比熱である．より立ち入って，空洞輻射を振動数で分け，任意の振動数 ν_1 から ν_2（$\nu_1 < \nu_2$）にわたる輻射のエネルギー密度を $\int_{\nu_1}^{\nu_2} \rho_T(\nu) d\nu$ の形に与える公式

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_{\mathrm{B}} T \tag{0.1}$$

が J.W.S. Rayleigh により，また J.H. Jeans によって導かれた．ここに c は真空中の光速，k_{B} はボルツマン（L. Boltzmann）定数である：

$$c = 3.00 \times 10^8\,\mathrm{m/s} \qquad k_{\mathrm{B}} = 1.380 \times 10^{-23}\,\mathrm{J/K}.$$

古典物理学からの帰結であるこの式 (0.1) は，低振動数領域でこそ実測に一致

[*4] たとえば，日本物理学会編『量子力学と新技術』（培風館，1987）を参照．

したが，高振動数領域では合わなかった．のみならず $u(T)$ を計算すると

$$u(T) = \int_0^\infty \rho_T(\nu)d\nu = \infty$$

という無意味な結果をあたえる（紫外カタストローフ）．W. Wien は，高振動数領域に対して，気体分子運動論と $\rho_T(\nu)$ を最大にする振動数 $\nu_{\max}$ に対する実験式 $\nu_{\max} \propto T$ （Wien の変移則）とを導きとして

$$\rho_T(\nu) = c_1\nu^3 e^{-c_2\nu/T}$$

の形を提案した．c_1 と c_2 は実測から定める定数である．こちらは，実験の支持もあった Stefan-Boltzmann の法則 $u(T) \propto T^4$ を導くが，しかし $\rho_T(\nu)$ が低振動数極限で T に無関係になり，高温極限で頭打ちになる点で実測との不一致は覆うべくもなかった．ここで，Wien の変位則も Stefan-Boltzmann の法則も熱力学で証明されていたことを注意しておく．

M. Planck は，$\rho_T(\nu)$ の実測が広い振動数範囲，温度範囲で精密になった機をとらえ，1900 年に実験式

$$\rho_T(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{h\nu/(k_B T)} - 1} \tag{0.2}$$

を提案した．ここに

$$h = 6.63 \times 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$

ととれば[*5]振動数と温度の測定がおよぶ全範囲で実測によく一致した．h は Planck の定数とよばれ，量子力学の発見に導く道標となるものである．

この形を Planck は Rayleigh-Jeans の公式と Wien の公式からある熱力学的な内挿によって得たのである．実際，(0.2) は，低振動数領域では

$$\frac{h\nu}{k_B T} \ll 1 \quad \text{において} \quad \rho_T(\nu) \sim \frac{8\pi\nu^2}{c^3}k_B T$$

となって Rayleigh-Jeans の公式に漸近し，高振動数領域では

$$\frac{h\nu}{k_B T} \gg 1 \quad \text{において} \quad \rho_T(\nu) \sim \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}e^{-h\nu/(k_B T)}$$

---

*5 今日の値．Planck の得た値は 6.55×10^{-34} J·s であった．

のように Wien の公式の形をとる．

Planck の定数は作用の次元（[エネルギー]·[時間]，[運動量]·[長さ]）をもつ．$\dfrac{h\nu}{k_{\mathrm{B}}T} \ll 1$ は

$$\frac{k_{\mathrm{B}}T}{\nu} \gg h$$

と書いて，“いま問題の量 (ν と T) に自然定数を組み合わせてつくった作用の次元の量が h に比べて極めて大きい” と読むことができる．このことを “h が小さい” と言い表わす．この意味で h が小さい領域で Plank の公式は古典物理の Rayleigh-Jeans の公式に漸近するのである．Wien の公式に漸近するのは “h が大きい” 領域においてである．

空洞内の輻射は空洞の壁にあって電気的に振動するもの（振動子）が放出したにちがいない．振動子は，ときには輻射を吸収することもあろう．Planck は彼の内挿公式の根拠をもとめて苦闘し，振動数 ν の振動子は輻射をエネルギーにして $h\nu$ 単位でのみ放出あるいは吸収するという仮説にたどりついた．そうであれば，彼の公式は振動子に対する熱平衡の条件から得られるのだった．

輻射がエネルギー $h\nu$ の単位で行なわれるなら，空洞をみたす輻射のエネルギーも各振動数で $h\nu$ の整数倍となる．A. Einstein は，一般に振動数 ν の光は $h\nu$ というエネルギーの塊からなると考えてみたら，と提案した．そして，金属面に光をあてると電子がとびだすという現象（光電効果）の特質が，この仮説により直ちに理解されることを指摘した．その考えを彼は力学的な振動一般にひろげ，結晶格子の振動に適用して固体比熱が低温にゆくほど小さくなるという実験事実を導きだした．

やがて，光のエネルギーの塊 $h\nu$ は定まった運動量 $h\nu/c$ をもって電子に衝突すること（コンプトン効果）が見いだされた．この塊は光子 (photon) とよばれる．

こうして,「物理学者は光を月・水・金には波動と考え，火・木・土には粒子と考える」羽目になった．Max Born の嘆きである．

0.3　定常状態と量子条件

0.3.1　原子スペクトル

古典物理学の限界を知らせ新しい力学への手掛りをあたえたのは光だけではなかった．他の重要な一つは原子スペクトルである．

原子の放出・吸収する光が原子の種類ごとに一連の特有の波長をもつこと（線スペクトル）は古くから知られていた．その波長の列がもつ規則性をとらえたのは J.J. Balmer である(1885)．彼は，水素原子の 4 本の線スペクトルの波長 λ が

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{0.3}$$

で $m = 2,\ n = 3, 4, 5, 6$ とおけば良い精度で再現されることを見いだしたのである．ただし

$$R = 1.097 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1}$$

である[*6]．その後，$m = 1, 3, 4, \cdots,\ n = m+1, m+2, \cdots$ の線も発見された．

また，他の原子についても線スペクトルの波長が

$$\frac{1}{\lambda} = A(m) - A(n) \quad (m = 1, 2, \cdots; n = m+1, m+2, \cdots) \tag{0.4}$$

という差の形に書けることが見いだされ，リッツ（W. Ritz）の結合原理と名づけられた．

原子について，1911 年に E. Rutherford が原子核を発見，そのまわりを電子が公転しているという太陽系モデルを提案した．しかし，Maxwell の電磁気学によれば，この電子は公転の加速度のために光を発してエネルギーを消耗し 10^{-10} s という短時間に原子核に墜落してしまうことになる．Rutherford の原子は安定に存在し得ないのである．

それに先立つ 1904 年に長岡半太郎は原子の土星モデルを提案，核のまわりを電子が周回しているとしたが — まだ原子の質量が核に集中していることを知らず — 電子の数を千の桁としたので電子の運動はほとんど直流の電流とみ

[*6] Balmer は m 単位に直すと $2^2/R = 3.645\,6 \times 10^{-7}$m に相当する値をあたえた．

なすことができて原子の安定性が保証されるのだった．ところが，Rutherford の発見のすぐ後に N. Bohr が水素原子の電子は 1 個であることを実験によって決定していたから，原子の安定性は深刻な問題だったのである．

0.3.2　定　常　状　態

Bohr は 1913 年に次の仮説を立てて原子の構造を論じた：

(i)　原子核をまわる電子には特別な軌道の列があって，その上を走る電子は— 加速度をもつにもかかわらず — 輻射をしない．この電子は，定常状態にあるという．

(ii)　定常状態の電子は Newton の運動方程式にしたがう．

(iii)　電子が輻射を放出（または吸収）するのは，一つの定常状態から他の定常状態に跳び移るときであり，そのとき放出（または吸収）されるのは 1 個の光子である．

仮説 (i) は原子内の電子は Maxwell の電磁気学にしたがわないことを宣言している．仮説 (ii) により電子は Newton の運動方程式にしたがうが，力学では運動は運動方程式と初期条件から定まるのである．この後者が (iii) で否定されている．エネルギー E_n の定常状態からエネルギー E_m の定常状態への跳び移りで光子 $h\nu$ が放出されるとすれば，エネルギーの保存則から

$$h\nu = E_n - E_m \tag{0.5}$$

が成り立つ．光の振動数 ν と波長 λ の関係 $\nu = \dfrac{c}{\lambda}$ に注意して (0.5) と (0.3) を比べれば，後者が差の形をしているのは原子の電子が整数で番号づけられるトビトビの定常状態をもつことを示す．定常状態のエネルギーがトビトビの

$$E_n = -hcR\frac{1}{n^2} \qquad (n = 1, 2, \cdots) \tag{0.6}$$

なのである．もちろん，これに定数が加わってもよいが，加えなくてもエネルギーとして一般性は損なわれないから，加えないでおこう．こうして，水素原子の電子が定常状態でもつべきエネルギーが定まった．これをエネルギー準位 (energy level) といい，エネルギー最低の定常状態を基底状態 (ground state) とよぶ．

水素以外の原子においても，スペクトル線が (0.4) の構造をもつことから原子にエネルギー準位があることになる．

0.3.3 量 子 条 件

Bohr の仮説は古典物理の基礎法則を原子内で否定し身勝手なばかりに見えるが，古典物理が原子の内部で妥当しないことを認め，新しい物理法則を探るべき場所を絞って提示したのである．ニュートン力学の運動方程式は残し，その多様な解から初期条件によって現実におこる運動を選びだすという部分を否定した．Maxwell の電磁方程式で電子の輻射を算出することは断念し，エネルギー保存則のみを残して，光子のエネルギーが $h\nu$ であたえられることを取り入れる．

そこで探求の焦点を当てるべき問題は，運動方程式をみたす多様な運動から定常状態を選びだす条件は何か，である．これは量子条件 (quantum condition) と名づけられた．

Bohr は水素原子の電子に対して原子核を中心とする円軌道を考え，$\hbar = \frac{h}{2\pi}$ とするとき，量子条件を

$$(\text{角運動量の大きさ}) = \hbar\text{の整数倍} \tag{0.7}$$

とすればエネルギー準位が正しく得られることを見いだした．すなわち，円軌道の半径を r，電子の運動量を p とすれば $rp = n\hbar$. ただし，n は整数．量子条件が，このように普遍的な — 個々の軌道のパラメーターによらない — 形に得られたことは，Bohr の着眼がまちがっていなかったことを示す．しかし，これでは調和振動子の直線運動（角運動量は 0）に対して無力であり，エネルギー準位が間隔 $h\nu$ の等差数列をなすという Planck の要請を裏書すべくもない．また水素原子においても，電子の楕円軌道まで考えに入れると Bohr の量子条件 (0.7) ではエネルギー準位は定まらない．

量子条件の探求は，力学変数の正準変換や系の断熱変化に関して共変であるとの要請をおいて手掛かりにするなど興味ふかいし，わが国の石原純の寄与もあるが，いまは立ち入る余裕がない[*7]．その延長線上で Heisenberg が行列力学

[*7] M. Jammer，朝永，前掲書などを参照．

を発見する.

L. de Broglie は光が粒子と波動の 2 重性をもつなら電子もと考え，運動量の電子には波長 $\lambda = h/p$ の波動が付随していると想像した．この目で Bohr の量子条件 (0.7) を見ると，それは $r\dot{p} = n\hbar$ だから

$$\frac{2\pi r}{\lambda} = \text{整数}, \tag{0.8}$$

すなわち，軌道上にちょうど整数個の波長がのることを意味していた．こうして，Bohr の量子条件の実体的な意味が明らかになった．調和振動子の直線運動においては軌道上で波長は一定でないが，de Broglie の量子条件は適用できて Planck の要請にあうエネルギー準位をもたらす．水素原子の電子が楕円軌道を描く場合も同じである．de Broglie のファンタジーは E. Schrödinger を波動力学の建設に導く.

0.4 量子力学の成立

0.4.1 二 つ の 出 発

こうして量子力学は二つの理論形式をとって現われた．Heisenberg によって着想され (1925)，Heisenberg-Born-Jordan が定式化した行列力学と Schrödinger の波動力学 (1926) である.

前者は，粒子の運動量 p_k と位置座標 q_k を正準交換関係

$$\begin{gathered} p_j q_k - q_k p_j \;=\; -i\hbar\delta_{jk}, \\ p_j p_k - p_k p_j = 0, \qquad\qquad q_j q_k - q_k q_j = 0 \end{gathered} \tag{0.9}$$

にしたがう行列とする代数的な形式であり，これらの行列から構成したハミルトニアン

$$\mathcal{H}_{\mathrm{H}} = \frac{1}{2m}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + V(q_1, q_2, q_3) \tag{0.10}$$

の固有値がエネルギー準位をあたえると主張する．ただし，m は粒子の質量，V は粒子に働く力のポテンシャルを表わす.

後者は，解析的で，運動量に $p_k = -i\hbar\dfrac{\partial}{\partial x_k}$, 位置座標に $q_k = x_k$ を当てて構成したハミルトニアン

$$\mathcal{H}_{\mathrm{S}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + V(x_1, x_2, x_3) \qquad (0.11)$$

から波動方程式

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x_1, x_2, x_3, t) = \mathcal{H}_{\mathrm{S}}\psi(x_, x_2, x_3) \qquad (0.12)$$

を立て，定常状態には

$$\psi(x_1, x_2, x_3, t) = u(x_1, x_2, x_3, t)e^{-iEt/\hbar} \qquad (0.13)$$

の形の波動関数が対応するものとする．そうすると，波動方程式は偏微分方程式の形の固有値問題をあたえる．

こうした形式の違いにもかかわらず，二つの理論があたえる物理的結論は常に一致するのだった．

0.4.2 変 換 理 論

行列力学と波動力学による計算結果の一致は謎めいていたが，Schrödinger にはじまり，Dirac や Jordan が定式化した変換理論によって形式的には解かれた．行列力学の正準交換関係 (0.9) と波動力学の

$$\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right)x_k - x_k\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j}\right) = -i\hbar\delta_{jk}, \qquad \text{etc.}$$

の対応が鍵だというのである．ただし，この式は両辺を波動関数に作用させるものとして読む．同等性は上記の二つの理論にかぎらず，より広く成り立つことが示唆された．それらの同値類が量子力学である．

0.5 量子力学の数学的構造

量子力学の数学的に厳密な枠組は J. von Neumann が打ちたてた (1927 - 1931) *8．彼は，抽象ヒルベルト空間とその上の線形演算子の理論を展開し，自

*8 J. von Neumann, *Die mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*, Springer (1932). 邦訳：『量子力学の数学的基礎』，恒藤敏彦・広重　徹 訳，みすず書房 (1957).

己共役演算子を定義した*9．量子力学は，von Neumann の観点からすれば正準交換関係をみたす代数の自己共役演算子による表現にほかならず，Heisenberg と Schrödinger の形式のちがいは演算子のはたらくヒルベルト空間を数列ベクトルの空間にとるか二乗可積分な関数 ψ の空間にとるかの違いにすぎないことになる．von Neumann により，普遍的な形で，量子力学の数学的本質がとらえられた．von Neumann は "座標から自由な" 量子力学の形式を打ち立てたのであり，この意義は極めて大きいと言わねばなるまい．量子力学が対象とする系の状態は，選んだヒルベルト空間の元で表わされ，物理量には自己共役演算子が対応する．

古典力学では，対象とする質点 m の一時刻における状態は，その時刻における m の運動量と位置座標の観測値で表わされた．状態はすなわち観測値であった．量子力学では状態と物理量が分裂するので，それらを観測値に媒介する観測の理論が必要になる．そこで自己共役演算子のスペクトル分解定理が本質的な役をする．von Neumann の上記の本も最後の章を観測の理論にあてているが，量子力学的な系の時間発展をシュレーディンガー方程式にしたがう因果的なものと観測による非因果的なものに分けた二元論には異議もだされている．

von Neumann は物理量に対応させる線形演算子に自己共役性を要請したが，運動量と位置座標に対応する演算子に対してしか自己共役性の証明をあたえていない．水素原子のハミルトニアンの自己共役性を証明したのは加藤敏夫 (1951) である*10．

0.6 本書の構成

本書の目的は大きく分けると二つある．ひとつは，上の話から示唆されるように，抽象ヒルベルト空間の理論を基礎に据えて，量子力学の一般的な数学的諸原理を公理論的方法によって定式化し，その普遍的な数学的構造を明らかに

*9 von Neumann は自己共役といわず hypermaximal といった．

*10 T. Kato: Fundamental Properties of Hamiltonian Operators of Schrödinger Type, *Trans. Am. Math. Soc.* **70** (1951) 195 - 211. 第二次大戦のため発表が遅れた．1944 年には完成していたことが記されている．

することである．第二の目的は，そのようにして定式化された一般的枠組に基づいて，量子力学のいろいろな主題について，その内容を数学的に厳密な形で展開することである．上に言及した von Neumann の仕事がすでに示しているように，量子力学に対するこのようなアプローチ—公理論的あるいは数理物理学的方法—の利点は，座標から自由な形で量子力学の数学的構造の本質を明確にできることであり，数学的に厳密な結果を確立できる点にある．これに加えて，この方法は，理論の普遍的な部分を，モデルに依存する個別的な部分から明瞭に峻別することを可能にし，これと相まって，量子力学に対する明晰な数学的認識を獲得することを可能にする．

量子力学の数理は，現代的な数学的観点から見れば，基本的には，ヒルベルト空間とそこで働く線形演算子の理論の応用である．これは古典力学の数理と比べて，かなり抽象的である．だが，量子力学の数学がそのように抽象的であるのはある意味では自然なのである．なぜなら，量子力学の基本的対象となる微視的な世界—ミクロの世界—は，通常の感覚では直接的には知覚されえない世界であって，そこでは，直接知覚しうる巨視的世界の知覚を通して形成された言葉あるいは数学的概念がそのまま通用しないとしても不思議ではないからである．古典物理学の限界とこれまでに確立された，量子力学の現実的有効性は，まさにこの考えの正当性を支持するものと見るのが適切であろう．別の言い方をすれば，分子や原子のスケール以下のミクロのレヴェルにおいては，自然は一段と深い，高度で抽象的な数学的原理にしたがって活動しているということができよう．

本書では，読者に対してヒルベルト空間論の知識を仮定しない．そこで，まず，数学的準備として，第1章，2章で抽象ヒルベルト空間と線形演算子の理論の基礎を展開する．これらの理論は，有限次元の線形代数学における行列論の抽象化であり無限次元化である．本書のこの部分は純粋に数学的に見えるが，上に述べた観点からは，それはすでに量子力学の数理の一部と見ることができる．

これらの準備のもとで，第3章，4章において，量子力学の公理論的基礎を叙述する．これは，基本的には，ヒルベルト空間に関わる諸々の数学的対象に物理的概念あるいは解釈を付与する手続きにほかならない．このことについて，ここで，読者のためにある見通しを述べておこう．量子力学における基本概念

は「状態」と「物理量」である．だが，当然予想されるように，これらは古典物理学のそれとはまったく異なるものである．微視的な系では，同一の状態において物理量を何度も観測（測定）する場合，その観測値は常に一定の値をとるとは限らず，一般には確率的に分布する．これは，量子力学においては，物理量とその観測値を区別してかからねばならないことを意味する．結論からいえば，量子力学の対象となる力学系，すなわち，量子系の状態はヒルベルト空間の零でないベクトルによって記述され，物理量は同じヒルベルト空間上で働く自己共役演算子によって表わされる[*11]．この命題は，量子力学の基本的な公理系の一部として設定される．自己共役演算子というのはヒルベルト空間上の線形演算子の中でも特別なクラスに属する演算子であり，他の一般の演算子に比べて著しい性質をそなえている．たとえば，一般に，演算子にはスペクトルとよばれる複素数の部分集合が対応するが，自己共役演算子のスペクトルは実数の閉部分集合である．量子力学の公理系から導かれる帰結のひとつとして，物理量の観測値の全体はそれを表わす自己共役演算子のスペクトルに等しいことが示される．ヒルベルト空間が有限次元の場合，自己共役演算子は，行列表現すれば，エルミート行列によって表わされる演算子である．このことから，ヒルベルト空間が無限次元の場合，自己共役演算子は，有限次元エルミート行列のある種の無限次元版であるとみなすことができる．線形代数学でよく知られているように，有限次元エルミート行列はユニタリ行列によって対角化可能であり，固有値と固有空間への射影演算子を用いてスペクトル分解される．ヒルベルト空間が無限次元の場合であっても，自己共役演算子に対しては，このスペクトル分解の一般化が成立し，それはスペクトル定理とよばれる．この定理はヒルベルト空間論における最も深くかつ重要な定理のひとつである．その証明には一連の長い準備的考察が必要とされる．スペクトル定理のおかげで，物理量が連続的なスペクトルを持つ場合にも，量子力学における確率解釈の厳密な定式化が可能になる．この意味で，スペクトル定理は量子力学のもっとも深い本質に関わっている．この点を考慮して，第2章でスペクトル定理の証明をあたえる．ヒルベルト空間論にすでになじみのある読者は，量子力学の公理論

[*11] 術語について，より詳しいことは本文の然るべき箇所を参照．

が展開される第３章から読み進むことも可能である．

本書は，便宜上，二つの巻に分けて出版される．いずれも，量子力学の数理の一般論ないし基礎編とみられる部分であり，四つの章と付録 A～D でもって本書は構成される．付録では，数学が専門でない読者の便宜のために，ルベーグ積分論，フーリエ解析，超関数論の基本的事項を採録した．叙述にあたっては，読者がこれらの理論を正しく活用できるよう留意したつもりである．

今後刊行予定の同著者の続編『量子物理の数理』では，本書で叙述された一般論を受けて，量子力学における基本的な数学的諸問題を主題ごとに論じていく．これらの主題として，物理量の自己共役性の問題，物理量のスペクトル解析，正準交換関係の表現論，対称性の表現，散乱理論，経路積分法，超対称的量子力学などをとりあげる予定である．

1
ヒルベルト空間と線形演算子

この章では，数学的準備として，ヒルベルト空間論を展開する．まず，線形性と内積を備えた抽象的な空間概念として内積空間が定義される．これは有限次元のユークリッド空間やユニタリ空間の抽象化である．内積から定まるノルムを用いて，内積空間の点どうしの近さを測る位相が導入される．この位相に関して，完備性の概念が定義される．完備な内積空間がヒルベルト空間である．ヒルベルト空間論における基本的な定理のひとつである正射影定理を証明する．次に，ヒルベルト空間上の線形演算子の理論の基本的部分を論じる．線形演算子の特別なクラスとして，有界線形汎関数とユニタリ演算子を導入する．前者に関しては，ヒルベルト空間論における最も基本的で重要な定理のひとつであるリースの表現定理を証明する．後者を用いてヒルベルト空間の同型が定義される．任意の内積空間をヒルベルト空間へと拡大する方法—完備化—についても述べる．

1.1　ヒルベルト空間

1.1.1　内　積　空　間

線形代数学やベクトル解析が展開される舞台のひとつである n 次元ユークリッド（Euclid）空間 $\mathbb{R}^n$ は，線形構造だけではなく，内積によって定まる計量的構造をも有している．この内積に現われている構造を抽象化することにより，内積空間という一般概念が得られる．内積空間であって，ある種の完全性を備えたものがヒルベルト (D. Hilbert) 空間である．まず，内積空間の定義からはじめよう．

定義 1.1　$\mathbb{F}$ を $\mathbb{R}$（実数体）または $\mathbb{C}$（複素数体）とし，H を $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間とする[*1]．H の任意の二つのベクトル Ψ, Φ に対して，数 $\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathsf{H}} \in \mathbb{F}$ が

---
*1　抽象ベクトル空間論において，$\mathbb{F}$ は係数体とよばれる．

対応し，以下の四つの性質 (H.1)〜(H.4) を満足するとき，$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathsf{H}}$ を H の**内積** (inner product) とよび，H を $\mathbb{F}$ 上の**内積空間** (inner product space) あるいは**前ヒルベルト空間** (pre-Hilbert space) という．

(H.1)（線形性） 任意の $\Psi, \Phi_1, \Phi_2 \in \mathsf{H}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ に対して，

$$\langle \Psi, \alpha\Phi_1 + \beta\Phi_2 \rangle_{\mathsf{H}} = \alpha\langle \Psi, \Phi_1 \rangle_{\mathsf{H}} + \beta\langle \Psi, \Phi_2 \rangle_{\mathsf{H}}.$$

(H.2)（対称性） 任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathsf{H}} = \langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathsf{H}}^*.$$

ここで，α^* は複素数 α の複素共役を表わす*2（$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ の場合は，$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathsf{H}}$ は実数なので，$\langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathsf{H}}^* = \langle \Phi, \Psi \rangle_{\mathsf{H}}$ である）．

(H.3)（正値性） すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\langle \Psi, \Psi \rangle_{\mathsf{H}} \geq 0$.

(H.4)（正定値性） $\langle \Psi, \Psi \rangle_{\mathsf{H}} = 0$ ならば $\Psi = 0_{\mathsf{H}}$. ここで，0_{H} は H の零ベクトルを表わす．

$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ のとき，H を**実内積空間**，$\mathbb{F} = \mathbb{C}$ のとき，H を**複素内積空間**とよぶ．

内積の定義に関連して補足的な事柄を述べておこう．H のベクトルの対の集合

$$\mathsf{H} \times \mathsf{H} := \{(\Psi, \Phi) | \Psi, \Phi \in \mathsf{H}\} \tag{1.1}$$

を H の**直積空間**という*3．ベクトル空間 H の内積というのは，$\mathsf{H} \times \mathsf{H}$ から $\mathbb{F}$ への写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathsf{H}} : (\Psi, \Phi) \to \langle \Psi, \Phi \rangle_{\mathsf{H}} \in \mathbb{F}$ で上記の (H.1)〜(H.4) をみたすものとみることができる．

直積空間 $\mathsf{H} \times \mathsf{H}$ から $\mathbb{F}$ への写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathsf{H}}$ で (H.1)〜(H.3) をみたすが (H.4) はみたすとは限らないものを**半正定値内積** (positive semi-definite inner product) という．半正定値内積を備えたベクトル空間を**半正定値内積空間**という．これも応用上重要である．

---

*2 α^* を $\bar{\alpha}$ と記す場合もある．

*3 $A := B$ は，A を B によって定義する，という意味の記法である．本書では，等号が定義である場合を強調したい場合にしばしば用いる．

上の定義では，$\langle\Psi,\Phi\rangle_{\mathsf{H}}$ の Ψ についての線形性はあらわに述べられていない．だが，(H.1), (H.2) を用いることにより，

$$\langle\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2,\Phi\rangle_{\mathsf{H}} = \alpha^*\langle\Psi_1,\Phi\rangle_{\mathsf{H}}+\beta^*\langle\Psi_2,\Phi\rangle_{\mathsf{H}}, \quad \Psi_1,\Psi_2,\Phi\in\mathsf{H},\alpha,\beta\in\mathbb{F}, \tag{1.2}$$

となることがわかる．$\mathbb{F}=\mathbb{C}$ の場合，性質 (1.2) を内積の**反線形性**という．

内積の線形性と反線形性を繰り返し用いることにより，一般に，すべての $N,M\in\mathbb{N}$（自然数の集合）に対して，

$$\left\langle\sum_{n=1}^N\alpha_n\Psi_n,\sum_{m=1}^M\beta_m\Phi_m\right\rangle_{\mathsf{H}} = \sum_{n=1}^N\sum_{m=1}^M\alpha_n^*\beta_m\left\langle\Psi_n,\Phi_m\right\rangle_{\mathsf{H}}, \quad \Psi_n,\Phi_m\in\mathsf{H},\ \alpha_n,\beta_m\in\mathbb{F}, \tag{1.3}$$

が成立することがわかる．これは，内積の計算をするうえで基本となる公式である．

内積空間 H の任意のベクトル Ψ に対して，内積の正値性により，

$$\|\Psi\|_{\mathsf{H}}=\sqrt{\langle\Psi,\Psi\rangle_{\mathsf{H}}} \tag{1.4}$$

という量が定義される．これを Ψ の**ノルム** (norm) とよぶ．これはベクトルの大きさを測る量である．すべての $\alpha\in\mathbb{F}$ と $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して，

$$\|\alpha\Psi\|_{\mathsf{H}}=|\alpha|\,\|\Psi\|_{\mathsf{H}} \tag{1.5}$$

が成り立つ．

内積空間 H の次元はベクトル空間としての H の次元であると定義する．

以下，どの内積空間の内積であるかがその文脈から明らかな場合は，$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle_{\mathsf{H}}$, $\|\cdot\|_{\mathsf{H}}$ をそれぞれ，単に $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$, $\|\cdot\|$ と記す．また，誤解の恐れのない限り，内積空間 H の零ベクトル 0_{H} を単に 0 と書く．

例 1.1 任意の自然数 n に対して，n 個の実数の組の集合

$$\mathbb{R}^n:=\{x=(x_1,\cdots,x_n)\mid x_j\in\mathbb{R},\ j=1,\cdots,n\}$$

は，自然な和と実数倍について $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になり，n 次元数ベクトル空間とよばれる．この空間の任意の二つのベクトル $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ に対して，実数 $\langle x, y\rangle$ を

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j$$

によって定義すれば，これは，$\mathbb{R}^n$ に内積を定め，この内積に関して，$\mathbb{R}^n$ は実内積空間になる．この実内積空間を **n 次元ユークリッド空間**といい，これも同じ記号 $\mathbb{R}^n$ で表わす．ベクトル $x \in \mathbb{R}^n$ の大きさ $|x|$ は

$$|x| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2}$$

によって定義される．これは x のノルム $\|x\|$ に等しい．

例 1.2　n 次元複素数ベクトル空間

$$\mathbb{C}^n := \{z = (z_1, \cdots, z_n) | z_j \in \mathbb{C}, j = 1, \cdots, n\}$$

の任意のベクトル $z = (z_1, \cdots, z_n)$, $w = (w_1, \cdots, w_n)$ に対して，$\langle z, w\rangle \in \mathbb{C}$ を

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j^* w_j$$

によって定義すれば，これは，$\mathbb{C}^n$ に内積を定め，この内積に関して，$\mathbb{C}^n$ は複素内積空間になる．この複素内積空間を **n 次元ユニタリ空間**とよぶ．ベクトル z の大きさ $|z|$ は

$$|z| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2}$$

によって定義される．これは z のノルム $\|z\|$ に等しい．

$\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{C}^n$ は有限次元の内積空間の例である．次に無限次元の内積空間の例を見よう．

例 1.3 数直線 $\mathbb{R}$ の閉区間 $[a,b]$ $(a<b)$ 上の複素数値連続関数の全体を $\mathsf{C}[a,b]$ とする．この集合の任意の二つの元 f,g に対して，和 $f+g$ とスカラー倍 αf $(\alpha \in \mathbb{C})$ を

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x)=\alpha f(x), \quad x\in[a,b],$$

によって定義すれば，この和とスカラー倍に関して，$\mathsf{C}[a,b]$ はベクトル空間になる．このベクトル空間は無限次元である（たとえば，$f_0(x)=1, f_n(x)=x^n$, $n\geq 1$, とすれば，$f_n \in \mathsf{C}[a,b]$ であり，任意の n に対して，$f_0,f_1,\cdots,f_n$ は一次独立である）．

$f,g\in\mathsf{C}[a,b]$ に対して，複素数 $\langle f,g\rangle$ を

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)^* g(x)dx$$

によって定義すれば，これは $\mathsf{C}[a,b]$ の内積になる．この複素内積空間を $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[a,b]$ と記す．

例 1.4 複素数列 $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ で，各成分の絶対値の 2 乗の和が有限，すなわち，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty$$

をみたすものの全体を l^2 とする．$a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, b=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}\in l^2$ に対して，和 $a+b$ とスカラー倍 αa $(\alpha\in\mathbb{C})$ が

$$a+b=\{a_n+b_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha a=\{\alpha a_n\}_{n=1}^{\infty},$$

によって定義される．実際， 任意の複素数 z_1,z_2 に対して成り立つ不等式

$$|z_1+z_2|^2\leq 2(|z_1|^2+|z_2|^2) \tag{1.6}$$

を応用すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n+b_n|^2\leq 2\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+2\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2<\infty.$$

したがって，$a+b \in l^2$．また，$\alpha a \in l^2$ は明らかであろう．上記の和とスカラー倍に関して，l^2 が複素ベクトル空間になることは容易に確かめられる．しかも，l^2 は無限次元である．たとえば，

$$e_n := \{\delta_{nj}\}_{j=1}^{\infty} \quad (n\text{ 番目の成分が 1 で他の成分は 0 の数列}) \tag{1.7}$$

とすると，任意の n に対して，$e_1, \cdots, e_n$ は一次独立である．

l^2 の任意の二つの元 $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, b=\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，複素数

$$\langle a, b\rangle_{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n$$

が定義される．実際，右辺は絶対収束している．これを見るには，初等的な不等式

$$|z_1 z_2| \le \frac{1}{2}(|z_1|^2 + |z_2|^2), \quad z_1, z_2 \in \mathbb{C}, \tag{1.8}$$

を応用すればよい．$\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle_{l^2}$ が内積であることも容易に確かめられる．l^2 はこの内積に関して，無限次元の複素内積空間である．容易にわかるように，l^2 は n 次元ユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ の無限次元版である．

1.1.2　内積空間の幾何学

内積空間において，ユークリッド空間やユニタリ空間の場合と類似の幾何学的諸概念を定義し，これらを用いてある種の幾何学を展開することができる．

以下，特に断らない限り，H を $\mathbb{F}$ 上の内積空間，$\langle\ \cdot\ ,\ \cdot\ \rangle$ をその内積とする．ノルムが 1 のベクトルを**単位ベクトル** (unit vector) とよぶ．零でない任意のベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\widetilde{\Psi} = \frac{\Psi}{\|\Psi\|}$$

とおけば，(1.5) によって，これは単位ベクトルである．ベクトル Ψ から，単位ベクトル $\widetilde{\Psi}$ をつくる手続きを Ψ の**規格化** (normalization) という．

ベクトル $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ が $\langle \Psi, \Phi\rangle = 0$ をみたすとき，Ψ と Φ は**直交する** (orthogonal) といい，$\Psi \perp \Phi$ と記す[*4]．

[*4] 直交性の概念は，半正定値内積に対しても，まったく同じに定義される．

H の二つの部分集合 $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2$ について，D_1 の任意のベクトルと D_2 の任意のベクトルが直交するとき，D_1 と D_2 は直交するといい，$\mathsf{D}_1 \perp \mathsf{D}_2$ と記す．

任意のベクトル $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，(1.3) によって，

$$\|\Psi + \Phi\|^2 = \|\Psi\|^2 + 2\mathrm{Re}\langle\Psi, \Phi\rangle + \|\Phi\|^2 \tag{1.9}$$

が成り立つ．ただし，複素数 z に対して，$\mathrm{Re}\, z$ は z の実部を表わす．したがって，次の結果を得る．

定理 1.2 ピタゴラス（Pythagoras）の定理． $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ が直交するならば

$$\|\Psi + \Phi\|^2 = \|\Psi\|^2 + \|\Phi\|^2.$$

ピタゴラスの定理の重要な帰結のひとつとして次の定理が導かれる：

定理 1.3 シュヴァルツ (H. A. Schwarz) の不等式． $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ をベクトル空間 H 上の半正定値内積とする．このとき，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$|\langle\Psi, \Phi\rangle| \le \|\Psi\|\|\Phi\| \tag{1.10}$$

が成り立つ．

もし，$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ が正定値性をみたすならば（したがって，$\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ は H の内積），(1.10) において等号が成立するのは，Ψ と Φ が一次従属の場合，すなわち，同時には 0 でない数 $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ があって，$\alpha\Psi + \beta\Phi = 0$ となる場合であり，かつこの場合に限られる．

証明 まず，$\|\Phi\| \neq 0$ の場合に (1.10) を示す．この場合，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ は，

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2,$$
$$\Psi_1 = \Psi - \frac{\langle\Phi, \Psi\rangle\Phi}{\|\Phi\|^2}, \quad \Psi_2 = \frac{\langle\Phi, \Psi\rangle\Phi}{\|\Phi\|^2},$$

と書き直せる．簡単な計算から，$\Psi_1 \perp \Psi_2$ がわかる．したがって，ピタゴラスの定理を用いると，

$$\|\Psi\|^2 = \|\Psi_1\|^2 + \|\Psi_2\|^2 \ge \|\Psi_2\|^2 = \frac{|\langle\Phi, \Psi\rangle|^2}{\|\Phi\|^2}.$$

ゆえに，(1.10) が得られる．

次に，$\|\Phi\| = 0$ の場合を考える．このとき，$\langle\Psi, \Phi\rangle = 0$ を示せばよい．任意の複素数 α に対して，$\|\Phi + \alpha\Psi\|^2 \geq 0$ であるから，左辺を展開して，

$$\alpha\langle\Phi, \Psi\rangle + \alpha^*\langle\Psi, \Phi\rangle + |\alpha|^2\|\Psi\|^2 \geq 0.$$

そこで，$\alpha = \langle\Psi, \Phi\rangle$ とすれば，

$$|\langle\Psi, \Phi\rangle|^2(2 + \|\Psi\|^2) \geq 0$$

が得られる．したがって，$|\langle\Psi, \Phi\rangle|^2 = 0$，すなわち，$\langle\Psi, \Phi\rangle = 0$.

等号成立の条件について：まず，Ψ と Φ が一次従属ならば，$\langle\cdot, \cdot\rangle$ が正定値であるか否かにかかわらず，(1.10) で等号が成立することは容易にわかる．

次に (1.10) で等号が成立したとし，$\langle\cdot, \cdot\rangle$ は正定値であるとする．$\|\Phi\| \neq 0$ のとき，第 1 段の証明からわかるように，$\Psi - \frac{\langle\Phi, \Psi\rangle\Phi}{\|\Phi\|^2} = 0$. したがって，$\Psi, \Phi$ は一次従属である．$\|\Psi\| \neq 0$ の場合も同様．$\|\Phi\| = 0$ の場合は，第 2 段の証明から，(1.10) において（両辺 $= 0$ で）等号が成立している．この場合，$\Phi = 0$ であるから，Φ, Ψ は一次従属である．$\|\Psi\| = 0$ の場合も同様． □

定理 1.3 の仮定に述べてあるように，シュヴァルツの不等式は半正定値内積でも成り立つことを強調しておこう*5.

シュヴァルツの不等式を具体的な内積空間の内積に応用すると種々の具体的な不等式を得ることができる．

例 1.5　関数の積分に対するシュヴァルツの不等式．内積空間 $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[a, b]$ において，定理 1.3 を応用すれば

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leq \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int_a^b |g(x)|^2 dx\right)^{1/2}, \quad f, g \in \mathsf{C}[a, b],$$

が得られる．

---

*5　ただし，この場合は，不等式の等号成立の条件については何も言えない．

例 1.6　級数に対するシュヴァルツの不等式．定理 1.3 を内積空間 l^2 に応用すれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n| \le \left(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2\right)^{1/2}, \quad a_n, b_n \in \mathbb{C},$$

が得られる．これは，しばしば，**コーシー** (A. L. Cauchy)-**シュヴァルツの不等式**とよばれる．

(1.9) 式の第 2 項にシュヴァルツの不等式を応用すれば

$$\|\Psi+\Phi\| \le \|\Psi\|+\|\Phi\| \tag{1.11}$$

が得られる．これをノルムに対する **3 角不等式**という．これも重要な不等式のひとつである．

この不等式に関連して，次の点を注意しておこう．任意の二つのベクトル $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$d(\Psi,\Phi) := \|\Psi-\Phi\|$ とすれば，これから定まる写像 $d : \mathsf{H}\times\mathsf{H} \to \mathbb{R}$ は**距離の公理**をみたすことが示される．すなわち，(i)（正値性） $d(\Psi,\Phi) \ge 0$, $\Psi,\Phi \in \mathsf{H}$; (ii) $d(\Psi,\Phi) = 0$ となるのは，$\Psi = \Phi$ のとき，かつこのときに限られる; (iii) （対称性) $d(\Psi,\Phi) = d(\Phi,\Psi)$, $\Psi,\Phi \in \mathsf{H}$; (iv)（3 角不等式）

$$d(\Psi,\Phi) \le d(\Psi,\Xi)+d(\Xi,\Phi), \quad \Psi,\Phi,\Xi \in \mathsf{H}.$$

したがって，$\|\Psi-\Phi\|$ $(\Psi,\Phi \in \mathsf{H})$ は Ψ と Φ の "距離"であると解釈することができ，内積空間 H は，この距離について，距離空間になる[*6]．

ユークリッド空間の幾何学を展開するうえで直交座標系をとって考えると便利なように，内積空間の理論の展開においても直交するベクトルの集合は重要な役割をはたす．内積空間 H の部分集合 D の相異なるベクトルが互いに直交し

---

*6　距離空間における 3 角不等式は，平面のユークリッド幾何学における重要な基本定理のひとつ「3 角形の一辺の長さは他の 2 辺の長さの和よりも小さい」の抽象化にほかならない．なお，本書を理解するには，距離空間の予備知識は特に必要ではない．距離空間については，たとえば，竹之内脩『トポロジー』(廣川書店，初版 1962，15 版 1973）の 2 章，3 章を参照．

ているとき，D は**直交系** (orthogonal system) であるという．特に，単位ベクトルからなる直交系を**正規直交系** (orthonormal system) とよぶ．

高々可算個の集合 $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{H}$ が正規直交系であることを式で表わせば

$$\langle \Psi_n, \Psi_m \rangle = \delta_{nm} \tag{1.12}$$

である．ここで，δ_{nm} はクロネッカー (L. Kronecker) のデルタである:

$$\delta_{mn} = \begin{cases} 1 & ; n = m \text{ のとき} \\ 0 & ; n \neq m \text{ のとき} \end{cases}$$

例 1.7　n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ において，

$$v_j := (0, \cdots, 0, 1, 0, \cdots, 0) \ (j \text{ 番目の成分が } 1\text{，他の成分は } 0 \text{ のベクトル})$$

によって定義されるベクトルの集合 $\{v_j\}_{j=1}^n$ は正規直交系である．これは n 次元ユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ の正規直交系でもある．

例 1.8　内積空間 l^2 において，(1.7) によって定義されるベクトル e_n の集合 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ は正規直交系である．

例 1.9　閉区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数

$$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx}, \quad n \in \mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm m, \cdots\} (\text{整数全体})$$

のつくる集合 $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ は $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[0, 2\pi]$ の正規直交系である．$f \in \mathsf{L}^2\mathsf{C}[0, 2\pi]$ に対して，

$$a_n(f) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} dx = \langle \phi_n, f \rangle$$

は f の**フーリエ** (J. B. J. Fourier) **係数**とよばれる．**オイラー** (L. Euler) **の公式**

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta, \quad \theta \in \mathbb{R},$$

から得られる関係式

$$\cos nx = \frac{1}{2}\left(e^{inx} + e^{-inx}\right), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}\left(e^{inx} - e^{-inx}\right),$$

といまの述べた事実によって，3 角関数系 $\{1/\sqrt{2\pi}, \cos nx/\sqrt{\pi}, \sin nx/\sqrt{\pi} \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ も $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[0, 2\pi]$ の正規直交系であることがわかる（章末演習問題 12）．

正規直交系の別の例については，章末演習問題 7～14 を参照.

内積空間 H の任意の正規直交系 $\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ と $\alpha_n \in \mathbb{F}, n = 1, \cdots, N, (N \in \mathbb{N})$ に対して，

$$\left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \Psi_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \tag{1.13}$$

が成り立つ [(1.3) と (1.12) を用いよ]. これは正規直交系の基本的な性質のひとつである.

ベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，数 $\langle \Psi_n, \Psi \rangle$ を正規直交系 $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{H}$ に関する，Ψ の**フーリエ係数**という. これは，例 1.6 における，通常の意味でのフーリエ係数の概念の抽象化である. フーリエ係数に関する次の事実は重要である.

定理 1.4 ベッセル (F. W. Bessel) **の不等式.** $\langle \cdot\, , \cdot \rangle$ をベクトル空間 H 上の半正定値内積とし，$\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ $(N \in \mathbb{N})$ を H の任意の正規直交系とする. このとき，すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\sum_{n=1}^N |\langle \Psi_n, \Psi \rangle|^2 \leq \|\Psi\|^2. \tag{1.14}$$

証明 $\Phi = \sum_{n=1}^N \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n$ とおくと，(1.13) によって，

$$\|\Phi\|^2 = \sum_{n=1}^N |\langle \Psi_n, \Psi \rangle|^2. \tag{1.15}$$

この等式と $\langle \Phi, \Psi \rangle = \sum_{n=1}^N |\langle \Psi_n, \Psi \rangle|^2$ によって，$\langle \Phi, \Psi - \Phi \rangle = 0$. したがって，$\Phi$ と $\Psi - \Phi$ は直交する. $\Psi = \Phi + (\Psi - \Phi)$ であるから，ピタゴラスの定理により，$\|\Psi\|^2 = \|\Phi\|^2 + \|\Psi - \Phi\|^2 \geq \|\Phi\|^2$. これと (1.15) によって，(1.14) を得る. □

ベッセルの不等式は次の重要な事実を導く：

系 1.5 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ を半正定値内積空間 H の正規直交系とする. このとき，すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\sum_{n=1}^\infty |\langle \Psi_n, \Psi \rangle|^2$ は収束し，

$$\sum_{n=1}^\infty |\langle \Psi_n, \Psi \rangle|^2 \leq \|\Psi\|^2 \tag{1.16}$$

が成立する．特に，

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Psi_n,\Psi\rangle = 0 \tag{1.17}$$

が成り立つ．

証明 $a_N = \sum_{n=1}^N |\langle\Psi_n,\Psi\rangle|^2$ とおけば，$\{a_N\}_{N=1}^\infty$ は単調非減少数列であり，(1.14) によって有界である．したがって，$\lim_{N\to\infty} a_N$ は存在し，(1.16) が成立する．(1.17) は，前半の結果と「数列 $\{b_n\}_{n=1}^\infty$ について，$\sum_{n=1}^\infty b_n$ が収束すれば，$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$」という初等的事実の応用から得られる． □

1.1.3 内積空間の位相とヒルベルト空間

ユークリッド空間やユニタリ空間の場合との類推にしたがって，内積空間には，そのノルムを用いて，位相的諸概念（点列の収束，近傍，開集合など）を導入することができる．まず，内積空間の点列（ベクトル列）の収束を定義する*7．以下，H を内積空間とする．

定義 1.6 H の点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ に対してベクトル $\Psi\in$ H があって，

$$\lim_{n\to\infty}\|\Psi_n-\Psi\| = 0$$

がみたされるとき，Ψ_n は Ψ に**収束する**という．この場合，Ψ を点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ の**極限**とよび，$\Psi = \lim_{n\to\infty}\Psi_n$ あるいは 単に $\Psi_n \to \Psi$ $(n\to\infty)$ と記す．収束する点列を**収束列**とよぶ．この意味での点列の収束を **H のノルム位相による収束**，あるいは単に **H における収束**とか **H 収束**という．

注意 収束列の極限はただひとつである（したがって，確かに，上の定義は意味をもつ）．実際，仮に，収束列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ の極限が二つあったとして，それらを Ψ,Φ としよう．3 角不等式によって

$$\|\Psi-\Phi\| = \|(\Psi-\Psi_n)+(\Psi_n-\Phi)\| \le \|\Psi-\Psi_n\|+\|\Psi_n-\Phi\|.$$

そこで，$n\to\infty$ とすれば，$\|\Psi-\Phi\|=0$ を得る．したがって，$\Psi=\Phi$．ここで，内積の正定値性が本質的に使われていることに注意しよう．

---

*7 内積空間の要素（ベクトル）もしばしば点という．

内積空間 H のベクトル Ψ に収束する点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を Ψ の**近似列**とよび，Ψ は点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ によって近似される，という言い方をする．この場合，各 Ψ_n を Ψ の**近似ベクトル**とよび，Ψ と Ψ_n の距離 $\|\Psi_n - \Psi\|$ を，Ψ を Ψ_n で近似したときの**誤差**という．

例 1.10 任意の $a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ に対して，$a^{(N)} \in l^2 (N = 1, 2, \cdots)$ を

$$(a^{(N)})_n = \begin{cases} a_n & ; 1 \le n \le N \\ 0 & ; n \ge N+1 \end{cases}$$

によって定義すれば，$\|a^{(N)} - a\|^2 = \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|^2 \to 0\ (N \to \infty)$．ゆえに，$a^{(N)}$ は a に収束する．すなわち，$\lim_{N\to\infty} a^{(N)} = a$．

内積空間 H の収束列に関して次の命題は基本的である．

命題 1.7 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}, \{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の任意の収束列とし，$\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi \in$ H, $\lim_{n\to\infty} \Phi_n = \Phi \in$ H, とする．このとき，

$$\lim_{n\to\infty} \|\Psi_n\| = \|\Psi\|, \tag{1.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} \langle \Psi_n, \Phi_n \rangle = \langle \Psi, \Phi \rangle. \tag{1.19}$$

証明 3 角不等式によって，任意の $\Psi, \Phi \in$ H に対して，

$$|\,\|\Psi\| - \|\Phi\|\,| \le \|\Psi - \Phi\| \tag{1.20}$$

が成り立つ[*8]．したがって，$|\,\|\Psi_n\| - \|\Psi\|\,| \le \|\Psi_n - \Psi\|$．ゆえに，(1.18) が成立する．

(1.19) を示すためには，まず，

$$\langle \Psi_n, \Phi_n \rangle - \langle \Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi_n - \Psi, \Phi_n \rangle + \langle \Psi, \Phi_n - \Phi \rangle$$

と書き直す．シュヴァルツの不等式を用いると

$$|\langle \Psi_n, \Phi_n \rangle - \langle \Psi, \Phi \rangle| \le \|\Psi_n - \Psi\| \|\Phi_n\| + \|\Psi\| \|\Phi_n - \Phi\|.$$

[*8] 実は，これは 3 角不等式と同値．

前段の結果より，$\|\Phi_n\| \to \|\Phi\|$ $(n \to \infty)$ であるから，上の不等式で $n \to \infty$ とすれば，(1.19) が得られる．□

等式 (1.18)，(1.19) は，それぞれ，**ノルムの連続性**，**内積の連続性**とよばれる．

実数の空間 $\mathbb{R}$ や複素数の空間 $\mathbb{C}$ は完備性という重要な性質をもっている．これに対応する概念を内積空間において考えるのは自然である．そのために，実数や複素数のコーシー列に対応する概念を導入する．

定義 1.8　$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の点列とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 n_0 が存在して，すべての $n, m \geq n_0$ に対して，$\|\Psi_n - \Psi_m\| < \varepsilon$ が成り立つとき，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**基本列** (fundamental sequence) あるいは**コーシー列**とよぶ．

H の点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，定数 $C > 0$ が存在して，すべての $n \geq 1$ に対して，$\|\Psi_n\| \leq C$ が成り立つとき，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は**有界**であるという．これは言い換えれば，$\sup_{n\geq 1} \|\Psi_n\| < \infty$ ということである．

次の事実は基本的である．

命題 1.9

(i)　コーシー列は有界である．

(ii)　収束列はコーシー列である．

証明　(i) $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H のコーシー列とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$m, n \geq n_0$ ならば，$\|\Psi_n - \Psi_m\| < \varepsilon$．したがって，$n \geq n_0$ ならば，

$$\|\Psi_n\| \leq \|\Psi_n - \Psi_{n_0}\| + \|\Psi_{n_0}\| < \varepsilon + \|\Psi_{n_0}\|.$$

これは，$\sup_{n\geq 1} \|\Psi_n\| \leq \max\{\|\Psi_1\|, \cdots, \|\Psi_{n_0-1}\|, \varepsilon + \|\Psi_{n_0}\|\} < \infty$ を導く．ゆえに，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である．

(ii) $\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi$ とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，適当な番号 n_0 が存在して，すべての $n \geq n_0$ に対して，$\|\Psi_n - \Psi\| < \varepsilon/2$．3 角不等式により，$n, m \geq n_0$ ならば，

$$\|\Psi_n - \Psi_m\| \leq \|\Psi_n - \Psi\| + \|\Psi - \Psi_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これは，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であることを示している．□

ところで，命題 1.9(ii) の逆は真であろうか．すなわち，コーシー列はつねに収束するであろうか．答えは，一般的には，否である．反例をあげよう．

例 1.11 内積空間 $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[0,1]$（例 1.3 で $a=0$, $b=1$ の場合）の点列 $\{f_n\}_{n=3}^{\infty}$ を次のように定義する（図 1.1 を参照）：

$$f_n(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ -n(x-\frac{1}{2})+1 & \frac{1}{2}\le x\le \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\\ 0 & \frac{1}{2}+\frac{1}{n}\le x\le 1.\end{cases}$$

このとき，直接の計算により，$\{f_n\}_{n=3}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[0,1]$ のコーシー列であることがわかる．もし，$\{f_n\}_{n=3}^{\infty}$ がある $f\in\mathsf{L}^2\mathsf{C}[a,b]$ に収束したとすると

$$\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|^2dx\to 0\quad (n\to\infty)$$

が成り立つ．ところが

$$\int_0^1 |f_n(x)-f(x)|^2dx\ge\int_0^{1/2} |f_n(x)-f(x)|^2dx=\int_0^{1/2} |1-f(x)|^2dx.$$

したがって，$\int_0^{1/2}|1-f(x)|^2dx=0$. これは，$f(x)=1,\quad 0\le x\le\frac{1}{2}$, を意味する．同様に，$\lim_{n\to\infty}\int_{1/2+1/n}^1|f(x)|^2dx=0$ であるから，$\int_{1/2}^1|f(x)|^2dx=0$. したがって，$f(x)=0$, $\frac{1}{2}\le x\le 1$, を意味する．これらの結果は f が $x=1/2$ で不連続であることを示し，f が連続であるという仮定に反する．ゆえに $\{f_n\}_{n=3}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[0,1]$ の中では収束しない．

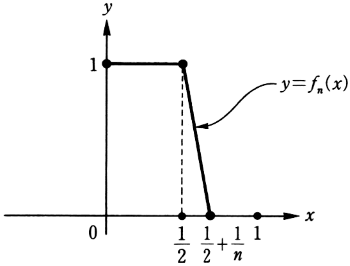


図 1.1 関数 f_n

注意　いまあげた例の場合，その論証からわかるように，不連続関数も含むような空間のなかで考えるならば，$\{f_n\}_{n=3}^{\infty}$ は収束している．この事実は，ある内積空間内—上の例の場合，$\mathsf{L}^2\mathsf{C}[0,1]$—では収束しないコーシー列であっても，空間を拡大すれば，それを収束させることが可能であることを暗示している．この考え方は，抽象的な形では，内積空間の完備化という概念と結びつく（1.4.4 項を参照）．

コーシー列が収束するかしないかはそれが属する内積空間の構造に依存している．そこで，次の定義を設ける．

定義 1.10　内積空間 H において，すべてのコーシー列が収束するならば，H は**完備** (complete) であるという．完備な内積空間を**ヒルベルト空間** (Hilbert space) とよぶ．係数体 $\mathbb{F}$ が $\mathbb{R}$ ($\mathbb{C}$) の場合のヒルベルト空間を**実（複素）ヒルベルト空間**という．

上の定義をより詳しく言い換えれば，ベクトル空間 H がヒルベルト空間であるとは，それが内積空間であって，H のどんなコーシー列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対しても，あるベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ が存在して，$\lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi$ が成立するということである．

ヒルベルト空間の完備性は，この空間に関わる解析を展開するうえで極めて重要な性質である．この重要性は，古典解析学を構築するうえでの実数の完備性の果たす重要性にたとえることができる．このたとえでいうならば，完備でない内積空間は，有理数の段階に相当する．量子力学への応用においては複素ヒルベルト空間が重要である．

例 1.12　n 次元ユークリッド $\mathbb{R}^n$ は実ヒルベルト空間である．この空間の完備性は実数のそれから導かれる．

例 1.13　n 次元ユニタリ空間 $\mathbb{C}^n$ は複素ヒルベルト空間である．この空間の完備性は複素数のそれから導かれる．

例 1.14　**2 乗総和可能な複素数列の空間 l^2（例 1.4）は無限次元の複素ヒルベルト空間であること**を示そう．l^2 が無限次元の内積空間であることはすでに見たから，その完備性を示せばよい．$\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ を l^2 の任意のコーシー列とする．

したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N が存在して，$n, m \geq N$ ならば，$\|a(n) - a(m)\| < \varepsilon$ が成り立つ．$a(n) = \{a(n)_j\}_{j=1}^{\infty}$ とすれば，l^2 のノルムの定義により，すべての番号 k に対して

$$\sum_{j=1}^{k} |a(n)_j - a(m)_j|^2 \leq \|a(n) - a(m)\|^2 < \varepsilon^2, \quad n, m \geq N. \quad (1.21)$$

したがって，特に，すべての j に対して，$|a(n)_j - a(m)_j| < \varepsilon, \quad n, m \geq N$. これは，$j$ を固定するとき，$\mathbb{C}$ の点列 $\{a(n)_j\}_{n=1}^{\infty}$ が $\mathbb{C}$ におけるコーシー列であることを示している．ゆえに，$\mathbb{C}$ の完備性により，ある $a_j \in \mathbb{C}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} a(n)_j = a_j$ となる．そこで，$a = \{a_j\}_{j=1}^{\infty}$ とおき，これが，実際，l^2 の元であり，$a(n) \to a$ $(n \to \infty)$ となることを示す．(1.21) において，はじめに $m \to \infty$ とし，そのあと極限 $k \to \infty$ をとると，

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a(n)_j - a_j|^2 \leq \varepsilon^2, \quad n \geq N. \quad (1.22)$$

これと $|a_j|^2 \leq 2(|a_j - a(n)_j|^2 + |a(n)_j|^2)$ によって，$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 < \infty$ がでる．したがって，$a \in l^2$. そこで，(1.22) にもどれば，$\|a(n) - a\| \leq \varepsilon, \quad n \geq N$. ゆえに，$\{a(n)\}_{n=1}^{\infty}$ は a に収束する．こうして，l^2 の完備性が証明された．

例 1.15 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とする（付録 A を参照）．X 上の B-可測な複素数値関数 f で，ルベーグ（H. L. Lebesgue）積分の意味で 2 乗可積分，すなわち，

$$\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty$$

をみたすものの全体の集合に，「$f(x) = g(x)$ μ-a.e.x ならば f と g は等しい」という相等の関係を入れてできる集合を $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ とする（付録 A.7 を参照）．$f, g \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，

$$\langle f, g \rangle_{\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)} = \int_{\mathsf{X}} f(x)^* g(x) d\mu(x)$$

とすれば，これは $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ に内積を定める．特に，

$$\|f\|_{\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)} = \sqrt{\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^2 d\mu(x)}.$$

付録 A の定理 A.15 を $p=2$ の場合に適用すれば，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ は複素ヒルベルト空間である．

ここで例としてとりあげたヒルベルト空間は L^2 型のヒルベルト空間あるいは単に **L^2 空間**とよばれ，量子力学の数学的理論において重要な役割を演じる．

L^2 空間の具体的な例をあげておこう．B^d を d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ のボレル集合体，すなわち，$\mathbb{R}^d$ の開集合全体から生成される σ 加法族（完全加法族）とする．$M \in \mathsf{B}^d$ とし，M の d 次元ルベーグ測度 $|M|$ は 0 でないとする．B_M を $\{B \cap M | B \in \mathsf{B}^d\}$ によって生成される σ 加法族，μ_L^d を d 次元ルベーグ測度とする（付録 A の例 A.3 を参照）．このとき，$(M, \mathsf{B}_M, \mu_L^d)$ は測度空間である．これに付随する L^2 空間を単に $\mathsf{L}^2(M)$ と記す：

$$\mathsf{L}^2(M) := \mathsf{L}^2(M, dx). \quad [dx := d\mu_L^d(x)]$$

より具体的な例として次のものがある：

$$\mathsf{L}^2([a,b]),\ \mathsf{L}^2((0,\infty)),\ \mathsf{L}^2(\mathbb{R}),\ \mathsf{L}^2([a,b]^d),\ \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d).$$

ただし，$-\infty < a < b < \infty$, $[a,b]^d = [a,b] \times \cdots \times [a,b]$ ($[a,b]$ の d 個の直積)．これらは，いずれも無限次元である（$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ の次元に関しては，付録 A の命題 A.14 を参照）．

1.1.4　正 射 影 定 理

$\mathbb{F}$ 上のベクトル空間 V の空でない部分集合 W が V の和とスカラー倍に関して閉じているとき，すなわち，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{W}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ に対して，$\alpha\Psi + \beta\Phi$ が再び W の元になっているならば，W を V の**線形部分空間**あるいは単に**部分空間** (subspace) という．したがって，W の部分空間は，V の和とスカラー倍に関して，それ自身でベクトル空間になっている．

さて，D をヒルベルト空間 H の部分集合とする．$\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ を D の収束列とし，その極限を Ψ とする．この場合，Ψ は D の元であるかどうかは一般にはわからない．もし，つねに Ψ も D の元であるならば，このような集合は点列の極限をとる操作において“閉じている”わけであり，ある意味で性質がよい集合とみることができる．そこで次の定義を設ける：ヒルベルト空間 H の部分集

合 D について，D の任意の収束列の極限が D の元であるとき，D は**閉である** (closed) という．閉である部分集合を**閉集合** (closed set) という．H の部分空間であって，かつ閉集合であるものを**閉部分空間** (closed subspace) という．

ヒルベルト空間 H の任意の閉部分空間は，H の内積によってヒルベルト空間である．実際，M を H の閉部分空間とし，$\{\Psi_n\}_n$ を M の任意のコーシー列とすれば，これは H のコーシー列でもある．したがって，$\Psi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$ となる $\Psi \in \mathsf{H}$ が存在する．だが，M は閉であるから，$\Psi \in \mathsf{M}$．ゆえに，M の任意のコーシー列は，M において収束する．

閉集合の補集合になっている部分集合を**開集合** (open set) という．すなわち，$\mathsf{D} \subset \mathsf{H}$ が開集合であるとは，$\mathsf{D}^c := \mathsf{H} \setminus \mathsf{D}$ が閉集合のときをいう．

H の部分集合 D に対して，D の収束列の極限をすべて集めてできる集合

$$\bar{\mathsf{D}} := \{\Psi \in \mathsf{H} | \lim_{n\to\infty} \Psi_n = \Psi \text{ となる } \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{D} \text{ が存在 }\}$$

を D の**閉包** (closure) という．

D の元 Ψ は，$\Psi_n = \Psi$, $n = 1, 2, \cdots$, によってあたえられる定ベクトル列の極限とみられるので，

$$\mathsf{D} \subset \bar{\mathsf{D}} \tag{1.23}$$

が成り立つ．

H の任意の二つの部分集合 $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2$ に対して

$$\mathsf{D}_1 \subset \mathsf{D}_2 \Longrightarrow \bar{\mathsf{D}}_1 \subset \bar{\mathsf{D}}_2 \tag{1.24}$$

が成り立つことも閉包の定義から容易にわかる*9.

命題 1.11　H の任意の部分集合 D に対して，$\bar{\mathsf{D}}$ は閉集合である．

証明　$\Psi_n \in \bar{\mathsf{D}}, \Psi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$ とする．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 が存在して，$n \geq n_0$ ならば，$\|\Psi_n - \Psi\| < \varepsilon$．一方，閉包の定義によ

*9　記号的な表示「$P_1 \Longrightarrow P_2$」（P_1, P_2 は命題）は「P_1 ならば P_2」と読む.「P_1 ならば P_2」かつ「P_2 ならば P_1」であるとき，$P_1 \Longleftrightarrow P_2$ と書く．これも以下しばしば用いる．

り，各 n に対して，$\|\Phi_n - \Psi_n\| < \varepsilon$ となる $\Phi_n \in \mathsf{D}$ が存在する．したがって，3 角不等式によって，$n \geq n_0$ ならば，$\|\Phi_n - \Psi\| \leq \|\Phi_n - \Psi_n\| + \|\Psi_n - \Psi\| < 2\varepsilon$. これは，$\Phi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$ を意味する．したがって，$\Psi \in \bar{\mathsf{D}}$．ゆえに，$\bar{\mathsf{D}}$ は閉集合である． □

例 1.16 正の実数 r とベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\mathsf{B}_r(\Psi) := \{\Phi \in \mathsf{H} \mid \|\Psi - \Phi\| < r\}$$

を中心 Ψ，半径 r の**開球** (open ball) という．このとき，

$$\mathsf{B}_r(\Psi)^c = \{\Phi \in \mathsf{H} \mid \|\Psi - \Phi\| \geq r\}$$

は閉集合であるので（これはノルムの連続性から容易にわかる），$\mathsf{B}_r(\Psi)$ は開集合である．また，

$$\overline{\mathsf{B}_r(\Psi)} = \{\Phi \in \mathsf{H} \mid \|\Psi - \Phi\| \leq r\}.$$

この集合は中心 Ψ，半径 r の**閉球** (closed ball) とよばれる．

H の部分集合 D があたえられたとき，D のすべてのベクトルと直交する，H のベクトルの全体を D の**直交補空間** (orthogonal complement) といい，$\mathsf{D}^\perp$ で表わす．式で書けば

$$\mathsf{D}^\perp = \{\Psi \in \mathsf{H} \mid \text{すべての } \Phi \in \mathsf{D} \text{ に対して}, \langle \Psi, \Phi \rangle = 0\}. \qquad (1.25)$$

$\mathsf{D}^\perp$ は閉部分空間である． 実際，まず，$\mathsf{D}^\perp$ が部分空間であることは内積の線形性から導かれる．$\mathsf{D}^\perp$ が閉集合であることを示すために，$\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathsf{D}^\perp$ が $\Psi \in \mathsf{H}$ に収束するとすれば，任意の $\Phi \in \mathsf{D}$ に対して，内積の連続性により，$\langle \Psi_n, \Phi \rangle \to \langle \Psi, \Phi \rangle$ $(n \to \infty)$．ところが，$\langle \Psi_n, \Phi \rangle = 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$ であるから $\langle \Psi, \Phi \rangle = 0$ となる．したがって，$\Psi \in \mathsf{D}^\perp$．ゆえに，$\mathsf{D}^\perp$ は閉集合である．

直交補空間の定義から容易にわかるように，H の部分集合 $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2$ について，

$$\mathsf{D}_1 \subset \mathsf{D}_2 \Longrightarrow \mathsf{D}_2^\perp \subset \mathsf{D}_1^\perp \qquad (1.26)$$

が成り立つ．

補題 1.12 H の任意の部分集合 D に対して，$(\bar{\mathsf{D}})^\perp = \mathsf{D}^\perp$.

証明 (1.23) と (1.26) から，$(\bar{\mathsf{D}})^\perp \subset \mathsf{D}^\perp$．逆の包含関係を示すために，$\Psi \in \mathsf{D}^\perp$ とする．任意の $\Phi \in \bar{\mathsf{D}}$ に対して，$\Phi_n \to \Phi\ (n \to \infty)$ となる $\{\Phi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathsf{D}$ がある．内積の連続性により，$\langle \Psi, \Phi_n \rangle \to \langle \Psi, \Phi \rangle\ (n \to \infty)$．一方，$\langle \Psi, \Phi_n \rangle = 0$ であるから，$\langle \Psi, \Phi \rangle = 0$．したがって，$\Psi \in (\bar{\mathsf{D}})^\perp$．ゆえに，$\mathsf{D}^\perp \subset (\bar{\mathsf{D}})^\perp$． □

H の部分集合 D とベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ の**距離**を

$$d(\Psi, \mathsf{D}) = \inf\{\|\Psi - \Phi\| \mid \Phi \in \mathsf{D}\} \tag{1.27}$$

によって定義する．ノルムの正値性により，$d(\Psi, \mathsf{D}) \geq 0$.

次に述べる定理は，ヒルベルト空間の幾何学における重要な事実のひとつである．

定理 1.13 M をヒルベルト空間 H の閉部分空間とする．このとき，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$d(\Psi, \mathsf{M}) = \|\Psi - \Psi_{\mathsf{M}}\|, \tag{1.28}$$

$$\Psi - \Psi_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}^\perp, \tag{1.29}$$

をみたすベクトル $\Psi_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}$ がただひとつ存在する．

証明 この定理の直観的描像は図 1.2 によってあたえられる．

簡単のため，$d = d(\Psi, \mathsf{M})$ とおく．d の定義によって，$d_n := \|\Psi_n - \Psi\| \to d\quad (n \to \infty)$ となる $\Psi_n \in \mathsf{M}$ がとれる．$d_n \geq d$ である．任意の 0 でないベクトル

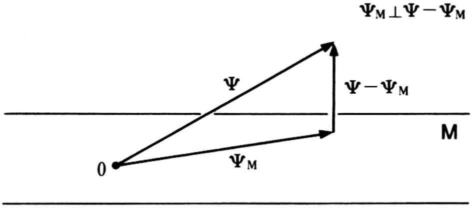


図 1.2 ベクトル Ψ_{M} に対する描像

$\eta \in \mathsf{M}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\Psi_n + \alpha\eta$ は M のベクトルだから $\|\Psi - \Psi_n - \alpha\eta\| \geq d$. したがって，

$$\|\Psi - \Psi_n\|^2 - 2\mathrm{Re}\{\alpha\langle\Psi - \Psi_n, \eta\rangle\} + |\alpha|^2\|\eta\|^2 \geq d^2.$$

特に，$\eta \neq 0$ として，$\alpha = \langle\eta, \Psi - \Psi_n\rangle/\|\eta\|^2$ とすれば，

$$|\langle\Psi - \Psi_n, \eta\rangle| \leq \|\eta\|\sqrt{d_n^2 - d^2} \tag{1.30}$$

を得る．これは $\eta = 0$ に対しても成立する．したがって，

$$\begin{aligned} |\langle\Psi_n - \Psi_m, \eta\rangle| &= |\langle(\Psi_n - \Psi) + (\Psi - \Psi_m), \eta\rangle| \\ &\leq |\langle\Psi_n - \Psi, \eta\rangle| + |\langle\Psi - \Psi_m, \eta\rangle| \\ &\leq \|\eta\|(\sqrt{d_n^2 - d^2} + \sqrt{d_m^2 - d^2}). \end{aligned}$$

そこで，$\eta = \Psi_n - \Psi_m$ $(\in \mathsf{M})$ とすれば，

$$\|\Psi_n - \Psi_m\| \leq \sqrt{d_n^2 - d^2} + \sqrt{d_m^2 - d^2} \to 0 \quad (n, m \to \infty).$$

したがって，$\{\Psi_n\}_n$ はコーシー列である．ゆえに，H の完備性によって，$\Psi_n \to \Psi_{\mathsf{M}}$ $(n \to \infty)$ となる $\Psi_{\mathsf{M}} \in \mathsf{H}$ がある．M は閉集合であるから，$\Psi_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}$ でなければならない．不等式 (1.20) を用いることにより

$$\big|d_n - \|\Psi - \Psi_{\mathsf{M}}\|\big| \leq \|\Psi_{\mathsf{M}} - \Psi_n\| \to 0 \quad (n \to \infty).$$

したがって，(1.28) を得る．(1.30) で $n \to \infty$ すれば，$\langle\Psi - \Psi_{\mathsf{M}}, \eta\rangle = 0, \quad \eta \in \mathsf{M}$．したがって，$\Psi - \Psi_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}^{\perp}$．ゆえに (1.29) を得る．

最後に Ψ_{M} の一意性を示そう．$\Phi \in \mathsf{M}$ で 条件 $\Psi - \Phi \in \mathsf{M}^{\perp}$ をみたすベクトルがあったとしよう．恒等式 $\Phi + (\Psi - \Phi) = \Psi = \Psi_{\mathsf{M}} + (\Psi - \Psi_{\mathsf{M}})$ により $\Phi - \Psi_{\mathsf{M}} = (\Psi - \Psi_{\mathsf{M}}) - (\Psi - \Phi)$．左辺は M の元であり，右辺は $\mathsf{M}^{\perp}$ の元である．一方，$\mathsf{M} \cap \mathsf{M}^{\perp} = \{0\}$ であるから，上式の両辺はともに 0 でなければならない．したがって，$\Phi = \Psi_{\mathsf{M}}$． □

定理 1.13 にいうベクトル Ψ_{M} をベクトル Ψ の M への**正射影** (orthogonal projection) という．

定理 1.13 から，次の重要な結果が得られる．

定理 1.14 正射影定理 (projection theorem). M をヒルベルト空間 H の閉部分空間とする．このとき，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\Psi_1 \in \mathsf{M}, \Psi_2 \in \mathsf{M}^\perp$ が存在して，

$$\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 \tag{1.31}$$

と一意的に表わされる．さらに，

$$\Psi_1 = \Psi_{\mathsf{M}}, \quad \Psi_2 = \Psi_{\mathsf{M}^\perp} \tag{1.32}$$

である．

証明 $\Phi_1 = \Psi - \Psi_{\mathsf{M}}$ とおく．このとき，定理 1.13 により，$\Phi_1 \in \mathsf{M}^\perp$ であり，$\Psi = \Psi_{\mathsf{M}} + \Phi_1$．すでに見たように，$\mathsf{M}^\perp$ は閉部分空間であるから，同様にして，$\Psi = \Psi_{\mathsf{M}^\perp} + \Phi_2$ となる $\Phi_2 \in (\mathsf{M}^\perp)^\perp$ がある．したがって，$\Psi_{\mathsf{M}^\perp} - \Phi_1 = \Psi_{\mathsf{M}} - \Phi_2$．左辺は $\mathsf{M}^\perp$ のベクトルであり，右辺は $(\mathsf{M}^\perp)^\perp$ のベクトルである（$\mathsf{M} \subset (\mathsf{M}^\perp)^\perp$ に注意）．しかし，$\mathsf{M}^\perp \cap (\mathsf{M}^\perp)^\perp = \{0\}$ であるから，両辺ともに零ベクトル 0 でなければならない．したがって，$\Phi_1 = \Psi_{\mathsf{M}^\perp}, \Phi_2 = \Psi_{\mathsf{M}}$．ゆえに，$\Psi = \Psi_{\mathsf{M}} + \Psi_{\mathsf{M}^\perp}$．したがって，$\Psi_1 = \Psi_{\mathsf{M}}, \Psi_2 = \Psi_{\mathsf{M}^\perp}$ として，(1.31) が成立する．

表示 (1.31) の一意性を示そう．別に，$\Psi_1' \in \mathsf{M}, \Psi_2' \in \mathsf{M}^\perp$ があって，$\Psi = \Psi_1' + \Psi_2'$ と書けたとしよう．このとき，$\Psi_1 - \Psi_1' = \Psi_2' - \Psi_2$．左辺は M に属し，右辺は $\mathsf{M}^\perp$ に属するので，実は，それらは 0 でなければならない．したがって，$\Psi_1 = \Psi_1', \Psi_2 = \Psi_2'$． □

定理 1.14 は，閉部分空間 M に対して，H の任意のベクトルが，M のベクトルと $\mathsf{M}^\perp$ のベクトルの和として一意的に表わされることを主張している．(1.31), (1.32) をベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ の M に関する**直交分解** (orthogonal decomposition) とよぶ．

定理 1.14 から，直交補空間に対する次の基本的事実が導かれる．

命題 1.15 M を H の部分空間とする．このとき，$(\mathsf{M}^\perp)^\perp = \bar{\mathsf{M}}$.

証明　$\mathsf{M} \subset (\mathsf{M}^\perp)^\perp$ は明らかである．したがって，$\bar{\mathsf{M}} \subset (\mathsf{M}^\perp)^\perp$．逆の包含関係を示すために，$\Psi \in (\mathsf{M}^\perp)^\perp$ とする．$\bar{\mathsf{M}}$ は閉部分空間であるから，正射影定理によって，$\Psi = \Psi_{\bar{\mathsf{M}}} + \Psi_{(\bar{\mathsf{M}})^\perp} \cdots (*)$ と書ける．補題 1.12 によって，$(\bar{\mathsf{M}})^\perp = \mathsf{M}^\perp$ であるから，$\langle \Psi, \Psi_{(\bar{\mathsf{M}})^\perp} \rangle = 0$．$(*)$ によって，左辺は，$\|\Psi_{(\bar{\mathsf{M}})^\perp}\|^2$ に等しいから，$\Psi_{(\bar{\mathsf{M}})^\perp} = 0$．したがって，再び $(*)$ によって，$\Psi = \Psi_{\bar{\mathsf{M}}}$．ゆえに，$\Psi \in \bar{\mathsf{M}}$．　□

部分集合 $\mathsf{D} \subset \mathsf{H}$ に対して，D のすべてのベクトルによって生成される部分空間を $\mathcal{L}(\mathsf{D})$ で表わす：

$$\mathcal{L}(\mathsf{D}) := \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j \Psi_j \middle| \alpha_j \in \mathbb{F}, \Psi_j \in \mathsf{D}, j = 1, \cdots, N,\ N \in \mathbb{N} \right\}. \quad (1.33)$$

例 1.17　M が N 個のベクトルからなる正規直交系 $\{\Psi_n\}_{n=1}^N (N \in \mathbb{N})$ から生成される部分空間の場合を考えよう：

$$\mathsf{M} = \mathcal{L}\left(\{\Psi_n\}_{n=1}^N\right).$$

このとき，M の任意の元 Φ は

$$\Phi = \sum_{n=1}^N \langle \Psi_n, \Phi \rangle \Psi_n \quad (1.34)$$

と一意的に表示される．なぜなら，$\Phi = \sum_{n=1}^N \alpha_n \Psi_n$ とすれば，

$$\langle \Psi_n, \Phi \rangle = \left\langle \Psi_n, \sum_{m=1}^N \alpha_m \Psi_m \right\rangle = \alpha_n$$

が成り立つからである．

表示 (1.34) を用いると，M は閉部分空間であることが示される．実際，$\Phi_n \in \mathsf{M}, \Phi_n \to \Phi \in \mathsf{H}\ (n \to \infty)$ とすると，

$$\langle \Psi_j, \Phi_n \rangle \to \langle \Psi_j, \Phi \rangle\ (n \to \infty)\ (j = 1, \cdots, N).$$

したがって，

$$\Phi_n = \sum_{j=1}^N \langle \Psi_j, \Phi_n \rangle \Psi_j \to \sum_{j=1}^N \langle \Psi_j, \Phi \rangle \Psi_j\ (n \to \infty).$$

ゆえに，$\Phi = \sum_{j=1}^{N} \langle \Psi_j, \Phi \rangle \Psi_j$ であり，これは M の元である．

任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，その M への正射影 Ψ_{M} を求めてみよう．容易にわかるように，$\Psi - \sum_{n=1}^{N} \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n \in \mathsf{M}^{\perp}$ であり，

$$\Psi = \sum_{n=1}^{N} \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n + \left(\Psi - \sum_{n=1}^{N} \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n \right)$$

と書けるので，直交分解の一意性により，

$$\Psi_{\mathsf{M}} = \sum_{n=1}^{N} \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n \tag{1.35}$$

である．

例 1.17 の特別な場合として，単位ベクトル Φ から生成される 1 次元部分空間 $\{\alpha\Phi | \alpha \in \mathbb{C}\}$ への，Ψ の正射影は，$\langle \Phi, \Psi \rangle \Phi$ となる．ここに現われた係数 $\langle \Phi, \Psi \rangle$ を **Ψ の Φ 方向への成分**あるいは**係数**という．

1.1.5 正規直交系の存在—グラム-シュミットの直交化

正射影の概念を用いると，ヒルベルト空間 H の一次独立なベクトルの集合 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{N}$ から正規直交系 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{N}$ を次のようにしてつくることができる（図 1.3 を参照）．

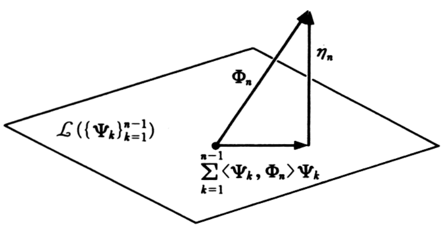


図 1.3 ベクトルの直交化

まず，Φ_1 を規格化する：$\Psi_1 := \Phi_1 / \|\Phi_1\|$．次に，$\Psi_1$ と直交する方向への，Φ_2 の正射影を考える．これは $\eta_2 := \Phi_2 - \langle \Psi_1, \Phi_2 \rangle \Psi_1$ によってあたえられる．Φ_1, Φ_2 は一次独立であるから，$\eta_2 \neq 0$．そこで，η_2 を規格化して，

$$\Psi_2 := \frac{\Phi_2 - \langle \Psi_1, \Phi_2 \rangle \Psi_1}{\|\Phi_2 - \langle \Psi_1, \Phi_2 \rangle \Psi_1\|}$$

とする．このとき，$\{\Psi_1, \Psi_2\}$ は正規直交系になる．

今度は，$[\mathcal{L}(\{\Psi_1, \Psi_2\})]^\perp$ への，Φ_3 の正射影

$$\eta_3 := \Phi_3 - \langle \Psi_1, \Phi_3 \rangle \Psi_1 - \langle \Psi_2, \Phi_3 \rangle \Psi_2$$

を考えて，それを規格化したベクトルを Ψ_3 とする:

$$\Psi_3 := \frac{\Phi_3 - \langle \Psi_1, \Phi_3 \rangle \Psi_1 - \langle \Psi_2, \Phi_3 \rangle \Psi_2}{\|\Phi_3 - \langle \Psi_1, \Phi_3 \rangle \Psi_1 - \langle \Psi_2, \Phi_3 \rangle \Psi_2\|}.$$

以下，同様な考え方に基づいて，帰納的に

$$\Psi_n = \frac{\Phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \Psi_k, \Phi_n \rangle \Psi_k}{\|\Phi_n - \sum_{k=1}^{n-1} \langle \Psi_k, \Phi_n \rangle \Psi_k\|} \tag{1.36}$$

を定義すれば，$\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ は正規直交系になる．この手続きを，$\{\Phi_n\}_{n=1}^N$ に関する**グラム** (J. P. Gram)-**シュミット** (E. Schmidt) **の直交化**とよぶ．この場合，$\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ が生成する部分空間と $\{\Phi_n\}_{n=1}^N$ が生成する部分空間とは等しい．すなわち，

$$\mathcal{L}\left(\{\Psi_n\}_{n=1}^N\right) = \mathcal{L}\left(\{\Phi_n\}_{n=1}^N\right). \tag{1.37}$$

1.1.6　完全正規直交系

ヒルベルト空間 H が有限次元で，$\dim \mathsf{H} = n$ ならば，n 個の一次独立なベクトルの集合—H の基底— $\{\Psi_j\}_{j=1}^n$ が存在して，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ は $\Psi = \sum_{j=1}^n \alpha_j \Psi_j$ という形に一意的に表わされる．グラム-シュミットの直交化により，$\{\Psi_j\}_{j=1}^n$ は正規直交系として一般性を失わない．この場合，$\langle \Psi_j, \Psi \rangle = \sum_{k=1}^n \langle \Psi_j, \alpha_k \Psi_k \rangle = \alpha_j$ となる．したがって，

$$\Psi = \sum_{j=1}^n \langle \Psi_j, \Psi \rangle \Psi_j.$$

この式は正規直交基底 $\{\Psi_j\}_{j=1}^n$ によるベクトル Ψ の展開式と見ることができる．

H が無限次元のヒルベルト空間の場合，正規直交系に関する，H のベクトルの展開を考察するには，H におけるベクトルの無限級数の概念をきちんと定義する必要がある．

ヒルベルト空間 H の点列 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$（正規直交系とは限らない）が，ある $\Phi \in$ H に対して

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}\Phi_n - \Phi\right\| \to 0 \quad (N \to \infty)$$

となるとき，“無限級数”$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n$ は Φ に収束するといい，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n = \Phi$$

と記す．これは，言い換えれば，部分和 $\sum_{n=1}^{N}\Phi_n$ が，$N \to \infty$ の極限で，Φ に収束することにほかならない：$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\Phi_n = \Phi$.

ヒルベルト空間 H の無限級数に関して，次の事実は基本的である．

補題 1.16　$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の正規直交系とする．このとき，$\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2 < \infty$ をみたす任意の数列 $\alpha = \{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{F}$ に対して，$\Psi(\alpha) := \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\Psi_n$ は収束し，$\|\Psi(\alpha)\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2$ が成立する．

証明　$\Phi_N = \sum_{n=1}^{N}\alpha_n\Psi_n$ とする．$N > M$ とすれば，

$$\|\Phi_N - \Phi_M\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N}|\alpha_n|^2 \to 0 \quad (N, M \to \infty).$$

$M > N$ の場合も同様である．したがって，$\{\Phi_N\}_{N=1}^{\infty}$ はコーシー列をなす．ゆえに，$\lim_{N\to\infty}\Phi_N = \sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\Psi_n$ は存在する．ノルムの連続性により，$\|\Psi(\alpha)\|^2 = \lim_{N\to\infty}\|\Phi_N\|^2 = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|\alpha_n|^2$.　□

$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の正規直交系とする．系 1.5 によって，任意の $\Psi \in$ H に対して，$\sum_{n=1}^{\infty}|\langle\Psi_n, \Psi\rangle|^2 < \infty$ であるから，補題 1.16 によって，

$$\widetilde{\Psi} := \sum_{n=1}^{\infty}\langle\Psi_n, \Psi\rangle\Psi_n \tag{1.38}$$

は収束する．$\widetilde{\Psi}$ がつねに Ψ に等しければ都合がよいが，そういうわけにはいかない（たとえば，もし，$\Psi \neq 0$ が $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ と直交するベクトルならば，$\widetilde{\Psi} = 0$ となるので，$\widetilde{\Psi} \neq \Psi$）．そこで，ベクトル $\widetilde{\Psi}$ がつねに Ψ に等しいか否かによって，正規直交系 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を区別すると便利である．こうして，次の定義に到る．

定義 1.17　$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ をヒルベルト空間 H の正規直交系とする．すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n \tag{1.39}$$

が成立するならば，正規直交系 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は**完全** (complete) であるという．完全な正規直交系を**完全正規直交系** (complete orthonormal system) という．

以下，しばしば，完全正規直交系のことを CONS と略して書く．式 (1.39) は CONS $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ による，ベクトル Ψ の展開とよばれる．

便宜上，H が有限次元で $\dim \mathsf{H} = n$ のとき，そのひとつの正規直交基底を完全正規直交系という．

正規直交系が完全であるための判定条件を考察することは，理論上も応用上も重要である．これに関して次の定理が成り立つ．

定理 1.18　$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ をヒルベルト空間 H の正規直交系とする．このとき，次の条件 (i), (ii), (iii), (iv) は同値である．

(i)　$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は完全である．

(ii)　すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Psi, \Psi_n \rangle \langle \Psi_n, \Phi \rangle \tag{1.40}$$

が成り立つ．ここで，右辺の級数は絶対収束している．

(iii)　**パーセヴァル** (M. A. Parseval) **の等式**．すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\|\Psi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\langle \Psi_n, \Phi \rangle|^2 \tag{1.41}$$

が成り立つ．

(iv)　すべての $n \geq 1$ に対して $\langle \Psi, \Psi_n \rangle = 0$ をみたすベクトル $\Psi \in \mathsf{H}$ は $\Psi = 0$ に限られる．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii)．これは，内積の連続性と $\{\Psi_n\}_n$ の直交性からでる．なお，(1.40) の級数が絶対収束していることは，級数に対するコーシー - シュヴァル

ツの不等式およびベッセルの不等式によって,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{N} |\langle \Psi, \Phi_n \rangle \langle \Psi_n, \Phi \rangle| \\
&\le \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle \Psi, \Psi_n \rangle|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} |\langle \Psi_n, \Phi \rangle|^2 \right)^{1/2} \\
&\le \|\Psi\| \, \|\Phi\|
\end{aligned}$$

となることからわかる.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii). (1.40) で $\Psi = \Phi$ とすればよい.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv). すべての $n \ge 1$ に対して, $\langle \Psi, \Psi_n \rangle = 0$ とすれば, (1.41) から $\|\Psi\| = 0$. ゆえに, $\Psi = 0$.

(iv) $\Longrightarrow$ (i). $\widetilde{\Psi}$ を (1.38) によって定義する. このとき, 任意の $n \ge 1$ に対して, $\langle \Psi - \widetilde{\Psi}, \Psi_n \rangle = 0$. したがって, 仮定により, $\Psi = \widetilde{\Psi}$. □

CONS の例はあとで見ることにして, ここで, CONS と関連する重要な位相的概念を導入しておく. ヒルベルト空間 H の二つの部分集合 D, F について, $\mathsf{D} \subset \mathsf{F}$ かつ $\mathsf{F} \subset \bar{\mathsf{D}}$ のとき, D は (H の位相において) F で**稠密** (dense) であるという. これは言い換えれば, F の任意のベクトル Ψ が D のベクトル列で近似できるということである. 特に, 部分集合 D が $\bar{\mathsf{D}} = \mathsf{H}$ をみたすとき, D は稠密であるという.

H の部分集合 $\mathsf{D}_1, \mathsf{D}_2, \mathsf{D}_3$ があって, D_1 は D_2 で稠密, D_2 は D_3 で稠密ならば, D_1 は D_3 で稠密である. これは稠密性の定義から容易にわかる.

例 1.18 2 乗総和可能な複素数列の全体からつくられるヒルベルト空間 l^2 の部分集合

$$l_0^2 := \{a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} | \text{ある番号}\, n_0 \,\text{があって}, n \ge n_0 \,\text{ならば}\, a_n = 0\} \quad (1.42)$$

は部分空間である (条件にいう番号 n_0 は a ごとに決まる). 例 1.10 の計算により, l_0^2 は稠密である (例 1.10 の $a^{(N)}$ は l_0^2 の元であることに注意).

命題 1.19 (i) H の部分空間 D が稠密であるための必要十分条件は, $\mathsf{D}^{\perp} = \{0\}$ が成立することである.

(ii) D を H の稠密な部分空間とする．二つのベクトル $\Psi_1, \Psi_2 \in$ H がすべての $\Psi \in$ D に対して，$\langle\Psi, \Psi_1\rangle = \langle\Psi, \Psi_2\rangle$ をみたすならば，$\Psi_1 = \Psi_2$ である．

証明 (i)（必要性）D は稠密であるとし，$\Psi \in \mathsf{D}^\perp$ とする．D は稠密であるから，$\Psi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$ となる $\Psi_n \in$ D が存在する．したがって，$\langle\Psi, \Psi_n\rangle \to \langle\Psi, \Psi\rangle$ $(n \to \infty)$．一方，$\langle\Psi, \Psi_n\rangle = 0$．したがって，$\langle\Psi, \Psi\rangle = 0$，すなわち，$\Psi = 0$．ゆえに，$\mathsf{D}^\perp = \{0\}$．

（十分性）$\mathsf{D}^\perp = \{0\}$ とする．$\mathsf{M} := \bar{\mathsf{D}}$ は閉部分空間であるから，正射影定理により，任意の $\Psi \in$ H は，$\Psi = \Psi_{\mathsf{M}} + \Psi_{\mathsf{M}^\perp}, \Psi_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}, \Psi_{\mathsf{M}^\perp} \in \mathsf{M}^\perp$, と直交分解できる．補題 1.12 により，$\mathsf{M}^\perp = \mathsf{D}^\perp = \{0\}$．したがって，$\Psi_{\mathsf{M}^\perp} = 0$．ゆえに，$\Psi = \Psi_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}$．これは $\mathsf{M} = \mathsf{H}$ を意味するので，D は稠密である．

(ii) 条件は，$\Psi_1 - \Psi_2 \in \mathsf{D}^\perp$ を意味する．(i) により，$\mathsf{D}^\perp = \{0\}$ であるから，$\Psi_1 - \Psi_2 = 0$. □

命題 1.19 と定理 1.18(iv) から次の事実が得られる：

命題 1.20 ヒルベルト空間 H の正規直交系 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ が完全であるための必要十分条件は，$\mathcal{L}(\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty)$ が稠密であることである．

証明 （必要性）$\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ が完全であるとすると，定理 1.18(iv) によって，$[\mathcal{L}(\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty)]^\perp = \{0\}$．したがって，命題 1.19 によって，$\mathcal{L}(\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty)$ は稠密である．

（十分性）$\mathcal{L}(\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty)$ が稠密ならば，命題 1.19 によって，$(\mathcal{L}[\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty)]^\perp = \{0\}$．したがって，定理 1.18(iv) が成立する． □

例 1.19 (1.7) によって定義される，l^2 の正規直交系 $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ は完全である．実際，任意の $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in l^2$ のフーリエ係数は $\langle e_n, a\rangle = a_n$ となるので，$\sum_{n=1}^\infty |\langle e_n, a\rangle|^2 = \|a\|^2$．したがって，定理 1.18(iii) がみたされる[*10]．

例 1.20 例 1.9 の関数系 $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $\mathsf{L}^2([0, 2\pi])$ の正規直交系であることはすでに見た．実はこれは CONS である．だが，これを示すには，いくぶん準備が

---

*10 $l_0^2 = \mathcal{L}(\{e_n\}_{n=1}^\infty)$ と命題 1.20 を用いてもよい．

必要である．ここでは簡単のため，古典解析学においてよく知られた結果から出発することにしよう．

閉区間 $[0,2\pi]$ 上のルベーグ積分可能な関数 f に対して，関数項級数

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_0^{2\pi} f(y)e^{-iny}dy\right)e^{inx}$$

は（収束するならば）f に関する**フーリエ級数**あるいは**フーリエ展開**とよばれる．もし，$f \in \mathsf{L}^2([0,2\pi])$ ならば，これは

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\langle\phi_n, f\rangle\phi_n(x)$$

という形に書ける．

$\mathbb{R}$ 上の連続微分可能かつ周期 2π の関数の定義域を $[0,2\pi]$ に制限して得られる関数全体の集合を $\mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi]$ とする．次の定理はフーリエ級数論の古典的な結果である[*11]:

定理 1.21 すべての $f \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi]$ に対して

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{N}\langle\phi_n, f\rangle\phi_n(x), \quad x \in [0,2\pi]. \tag{1.43}$$

この収束は $[0,2\pi]$ 上で一様である．

関数 f が $\mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi]$ に属するとき，(1.43) の右辺の級数は $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ の収束の意味でも収束する．なぜなら，(1.43) は，勝手な $\varepsilon > 0$ に対し，番号 N_0 がとれて，$N \geq N_0$ ならば

$$\sup_{x\in[0,2\pi]}\left|f(x) - \sum_{n=-N}^{N}\langle\phi_n, f\rangle\phi_n\right| < \varepsilon$$

---

*11 証明については，たとえば，クーラン ＝ ヒルベルト『数理物理学の方法 1』（東京図書，邦訳初版 1959; 原著 R. Courant und D. Hilbert: *Methoden der Mathematischen Physik I*, Springer, Berlin, 初版 1931）の 2 章 §5 を参照．この本では，区間 $[-\pi,\pi]$ 上の周期関数に対してフーリエ展開が論じられているが，区間の違いは本質的ではない．なぜなら，$[-\pi,\pi]$ 上の周期関数 f は $\widetilde{f}(x) := f(x-\pi), x \in [0,2\pi]$, によって，$[0,2\pi]$ 上の周期関数を定義するからである．したがって，定理 1.21 の結果を $\widetilde{f}$ に応用することにより，f のフーリエ展開が得られる．逆に，$[-\pi,\pi]$ 上の周期関数についてのフーリエ展開から定理 1.21 が得られる．

を意味し，したがって

$$\left\| f - \sum_{n=-N}^{N} \langle \phi_n, f\rangle \phi_n \right\|^2_{\mathsf{L}^2([0,2\pi])} = \int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} \langle \phi_n, f\rangle \phi_n \right|^2 dx$$
$$< 2\pi\varepsilon^2$$

となるからである．これは，$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ によって生成される部分空間 $\mathcal{L}(\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ が，$\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ の位相で，$\mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi]$ において稠密であることを示している．

一般に，d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の関数 f に対して，その値 $f(x)$ が 0 でない点 x の集合の**閉包** (closure)

$$\operatorname{supp} f := \overline{\{x\in\mathbb{R}^d | f(x)\neq 0\}} \tag{1.44}$$

を f の**台** (support) という．これは $\mathbb{R}^d$ の閉集合である．

$\mathsf{C}^\infty_0(0,2\pi)$ を $(0,2\pi)$ 上の無限回微分可能な関数でその台が $(0,2\pi)$ に含まれるものの全体とする．明らかに，$\mathsf{C}^\infty_0(0,2\pi)\subset \mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi]$．一方，$\mathsf{C}^\infty_0(0,2\pi)$ は $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ で稠密である（証明は，付録 B の定理 B.1 のそれと同様）．したがって，$\mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi]$ は $\mathsf{L}^2(0,2\pi)$ で稠密である．ゆえに，$\mathcal{L}(\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}})$ は $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ で稠密である．この事実と命題 1.20 によって，$\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ の CONS である．この事実から，3 角関数系 $\{1/\sqrt{2\pi}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \mid n\in\mathbb{N}\}$ も $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ の CONS であることが示される（章末演習問題 12）．

いま証明した事実によって，任意の $f\in\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ に対して，

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{2\pi} \left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} \langle \phi_n, f\rangle \phi_n(x) \right|^2 dx = 0$$

を得る．すなわち，部分和 $\sum_{n=-N}^{N}\langle\phi_n,f\rangle\phi_n$ は $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ の位相で f に収束する．これは，上記の古典的定理 1.21 の一般化になっている．定理 1.21 では部分和の収束は一様収束の意味においてであったが，収束の位相（収束の意味）を変えることによって，より広いクラスの関数に対して，フーリエ級数展開が可能になったのである．

1.1.7 可分性と CONS の存在

どんなヒルベルト空間においても CONS は存在するであろうか．この問題を考察するためにある概念を導入する：ヒルベルト空間 H について，高々可算個の元からなる部分集合 $\mathsf{D} \subset \mathsf{H}$ があって，$\mathcal{L}(\mathsf{D})$ が稠密なとき，H は**可分** (separable) であるという．

例 1.21 l^2 は可分である．なぜなら，$\mathsf{D} = \{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ とすれば，$\mathcal{L}(\mathsf{D})$ は稠密だからである（例 1.18 を参照）．

CONS の存在に関する次の定理は理論的に重要である．

定理 1.22 可分なヒルベルト空間は CONS をもつ．

証明 H を可分なヒルベルト空間とし，$\mathsf{D} = \{\Psi_n\}_{n=1,2,\cdots}$ を高々可算個の元からなる，H の部分集合で $\mathcal{L}(\mathsf{D})$ は H で稠密であるとする．各 n に対して，$\Psi_1, \cdots, \Psi_n$ は一次独立であるとは限らないので，次の規則によって，$\{\Psi_n\}_n$ からベクトルを除く：まず，$\Psi_1 = 0$ ならば除き，$\Psi_1 \neq 0$ ならば除かない．$n > 1$ に対しては，Ψ_n が $\Psi_1, \cdots, \Psi_{n-1}$ の生成する部分空間に属するならば除き，属さなければ除かない．この手続きによって除かれずに残った，$\{\Psi_n\}_{n=1,2,\cdots}$ の中のベクトルを順をくずさずに番号をつけなおし，$\Psi'_1, \Psi'_2, \cdots$ とする．このとき，任意の n に対して，$\Psi'_1, \cdots, \Psi'_n$ は一次独立であり，$\mathcal{L}(\mathsf{D}) = \mathcal{L}(\{\Psi'_n\}_{n=1,2,\cdots})$ が成立することは容易にわかる．一次独立なベクトルの集合 $\{\Psi'_n\}_{n=1,2,\cdots}$ にグラム-シュミットの直交化を行うことによって得られる正規直交系を $\{\Phi_n\}_n$ とすれば，$\mathcal{L}(\{\Phi_n\}_n) = \mathcal{L}(\mathsf{D})$．したがって，$\mathcal{L}(\{\Phi_n\}_n)$ は稠密である．ゆえに，命題 1.20 により，正規直交系 $\{\Phi_n\}_n$ は完全である． □

定理 1.22 の応用として，次の事実が得られる：

定理 1.23 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ は可分である．したがって，CONS をもつ．

この定理を証明する前に，言葉を用意する．$\mathbb{R}^d$ 上の連続関数で有界な台をもつものの全体を $\mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ とする．これは $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密である（付録 B の補題 B.2 を参照）．

一般に，空でない任意の集合 X の部分集合 S に対して，

$$\chi_{\mathsf{S}}(x) := \begin{cases} 1; & x \in \mathsf{S}\text{ のとき} \\ 0; & x \notin \mathsf{S}\text{ のとき} \end{cases} \tag{1.45}$$

によって定義される，X 上の関数 χ_{S} を S の**定義関数** (characteristic function) という．

定理 1.23 の証明

d 個の自然数の組 $\mathbf{n} = (n_1, \cdots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ に対して，$I_{\mathbf{n}} = [-n_1, n_1] \times \cdots \times [-n_d, n_d]$ とし，$I_{\mathbf{n}}$ の定義関数を $\chi_{\mathbf{n}}$ とする．非負の整数の組 $\mathbf{m} = (m_1, \cdots, m_d)$ に対して，$p_{\mathbf{m}}(x) = x_1^{m_1} \cdots x_d^{m_d}$ とおき，

$$\mathsf{D} = \{\chi_{\mathbf{n}} p_{\mathbf{m}} | \mathbf{n} \in \mathbb{N}^d, \mathbf{m} \in (\{0\} \cup \mathbb{N})^d\}$$

とする．明らかに，$\mathsf{D} \subset \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ であり，D は可算無限個の元からなる．任意の $f \in \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\operatorname{supp} f \subset I_{\mathbf{n}}$ となる $\mathbf{n}$ がある．ヴァイエルシュトラス (K. T. W. Weierstrass) の多項式近似定理[*12]により，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，多項式 P があって，$\sup_{x \in I_{\mathbf{n}}} |P(x) - f(x)| < \varepsilon$．したがって，$\|\chi_{\mathbf{n}} P - f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon\sqrt{|I_{\mathbf{n}}|}$．これは，$\mathcal{L}(\mathsf{D})$ が（$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の位相において）$\mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ で稠密であることを示している．この結果と $\mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ の $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ における稠密性によって，$\mathcal{L}(\mathsf{D})$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ で稠密である（例 1.18 の直前の叙述を参照）． □

1.1.8　ヒルベルト空間の直和

高々可算個のヒルベルト空間があたえられたとき，これらをもとにして別のヒルベルト空間をつくることができることを示そう．$n \in \mathbb{N}$ とし，H_j $(j = 1, \cdots, n)$ をヒルベルト空間とする．$\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_n$ の直積

$$\mathsf{H}_1 \times \cdots \times \mathsf{H}_n := \{\Psi = (\Psi_j)_{j=1}^n = (\Psi_1, \cdots, \Psi_n) | \Psi_j \in \mathsf{H}_j, j = 1, \cdots, n\}$$

に和とスカラー倍が次のように定義される：

$$\text{和：}\ \Psi + \Phi = (\Psi_1 + \Phi_1, \cdots, \Psi_n + \Phi_n),$$
$$\text{スカラー倍：}\ \alpha\Psi = (\alpha\Psi_1, \cdots, \alpha\Psi_n), \quad \alpha \in \mathbb{F}.$$

[*12] たとえば，クーラン ＝ ヒルベルト『数理物理学の方法 1』（東京図書）の 2 章 §4 を参照．

このとき，$\mathsf{H}_1 \times \cdots \times \mathsf{H}_n$ はベクトル空間になる．$\mathsf{H}_1 \times \cdots \times \mathsf{H}_n$ のベクトル Ψ, Φ に対して，

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \sum_{j=1}^{n} \langle \Psi_j, \Phi_j \rangle_{\mathsf{H}_j}$$

とすれば，これは内積になる．ベクトル空間 $\mathsf{H}_1 \times \cdots \times \mathsf{H}_n$ にこの内積を付与して得られる内積空間を $\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_n$ の**直和** (direct sum) とよび，記号的に $\mathsf{H}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathsf{H}_n$ あるいは $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathsf{H}_j$ と書く．

定理 1.24

(i)　$\mathsf{H}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathsf{H}_n$ はヒルベルト空間である．

(ii)　各 j に対して，D_j を H_j の稠密な部分空間とすると，ベクトル空間としての直和

$$\bigoplus_{j=1}^{n} \mathsf{D}_j := \{(\Psi_1, \cdots, \Psi_n) | \Psi_j \in \mathsf{D}_j, j = 1, \cdots, n\}$$

は $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathsf{H}_j$ の稠密な部分空間である[*13]．

証明　(i) $\{\Psi(N)\}_{N=1}^{\infty}$ を $\bigoplus_{j=1}^{n} \mathsf{H}_j$ のコーシー列とし，$\Psi(N) = (\Psi(N)_j)_{j=1}^{n}$ とする．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 が存在して $N, M \geq n_0$ ならば $\|\Psi(N) - \Psi(M)\| < \varepsilon$．一方，

$$\|\Psi(N) - \Psi(M)\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\Psi(N)_j - \Psi(M)_j\|_{\mathsf{H}_j}^2 \geq \|\Psi(N)_j - \Psi(M)_j\|_{\mathsf{H}_j}^2$$

であるから，$\|\Psi(N)_j - \Psi(M)_j\|_{\mathsf{H}_j} < \varepsilon,\ N, M \geq n_0\ (j = 1, 2, \cdots, n)$．これは，各 j に対して，$\{\Psi(N)_j\}_{N=1}^{\infty}$ が H_j のコーシー列であることを示している．H_j はヒルベルト空間であるから，あるベクトル $\Psi_j \in \mathsf{H}_j$ が存在して $\|\Psi(N)_j \to \Psi_j\|_{\mathsf{H}_j} \to 0\ (N \to \infty)$ となる．そこで，$\Psi = (\Psi_j)_{j=1}^{n}$ というベクトルを定義すれば，これは，$\mathsf{H}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathsf{H}_n$ の元であって，$\|\Psi(N) - \Psi\| \to$

[*13] 一般に，$\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_n$ をベクトル空間とするとき，$\bigoplus_{j=1}^{n} \mathsf{V}_j := \{(\psi_1, \cdots, \psi_n) | \psi_j \in \mathsf{V}_j, j = 1, \cdots, n\}$ を**ベクトル空間** $\mathsf{V}_1, \cdots, \mathsf{V}_n$ **の直和**という（和とスカラー倍は内積空間の直和の場合と同様に定義する）．

$0\ (N \to \infty)$ となる．ゆえに，コーシー列 $\{\Psi(N)\}_{N=1}^{\infty}$ は収束する．したがって，$\mathsf{H}_1 \bigoplus \cdots \bigoplus \mathsf{H}_n$ は完備である．

(ii) 任意の $\Psi = (\Psi_1, \cdots, \Psi_n) \in \bigoplus_{j=1}^{n} \mathsf{H}_j$ と各 j に対して，$\Psi_j(k), \to \Psi_j\ (k \to \infty)$ となる $\Psi_j(k) \in \mathsf{D}_j$ が存在する．そこで，$\Psi(k) = (\Psi_1(k), \cdots, \Psi_n(k))$ とおけば，$\Psi(k) \in \bigoplus_{j=1}^{n} \mathsf{D}_j$ であり，

$$\|\Psi(k) - \Psi\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|\Psi_j(k) - \Psi_j\|_{\mathsf{H}_j}^2 \to 0\ (k \to \infty),$$

すなわち，$\Psi(k) \to \Psi\ (k \to \infty)$．ゆえに，題意がしたがう．□

例 1.22 (i) $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{R}$.

(ii) $\mathbb{C}^n = \bigoplus_{j=1}^{n} \mathbb{C}$.

次にヒルベルト空間の無限直和を定義しよう．$\mathsf{H}_n, n \in \mathbb{N}$, をヒルベルト空間とする．集合

$$\mathsf{H} := \left\{ \Psi = \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \middle| \Psi_n \in \mathsf{H}_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|\Psi_n\|_{\mathsf{H}_n}^2 < \infty \right\}$$

は次の和とスカラー倍によってベクトル空間になる（証明は l^2 の場合と同様）：

$$\text{和：}\ \Psi + \Phi = \{\Psi_n + \Phi_n\}_{n=1}^{\infty},$$

$$\text{スカラー倍：}\ \alpha\Psi = \{\alpha\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha \in \mathbb{F}.$$

$\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \sum_{n=1}^{\infty} \langle \Psi_n, \Phi_n \rangle_{\mathsf{H}_n}$$

とすれば，これは H に内積をあたえる．こうして定義される内積空間を $\mathsf{H}_n, n = 1, 2, 3, \cdots,$ の**無限直和** (infinite direct sum) とよび，$\mathsf{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathsf{H}_n$ と記す．

H_n の部分空間 D_n から定義される，H の部分空間

$$\widehat{\bigoplus}_{n=1}^{\infty} \mathsf{D}_n := \{\Psi = \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} | \Psi_n \in \mathsf{D}_n,\ n \geq 1, \text{ある番号 } n_0 \text{ があって } n \geq n_0 \text{ ならば } \Psi_n = 0\}$$

を $\mathsf{D}_n, n \geq 1,$ の**不完全無限直和** (incompleted infinite direct sum) という（条件にいう番号 n_0 は Ψ ごとに異なり得る）．

定理 1.25

(i) $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathsf{H}_n$ はヒルベルト空間である.

(ii) 各 n に対して，D_n を H_n の稠密な部分空間とするとき，D_n，$n \geq 1$, の不完全無限直和 $\widehat{\bigoplus}_{n=1}^{\infty} \mathsf{D}_n$ は $\bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathsf{H}_n$ で稠密である.

証明 (i) 証明の考え方は l^2 の完備性の証明のそれと同様である．詳細を埋めることは読者の演習とする.

(ii) 任意の $\Psi = \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \in \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathsf{H}_n$ に対して，$\Psi(N) := \{\Psi_1, \cdots, \Psi_N, 0, 0, 0, \cdots\}$ とすれば，$\|\Psi(N) - \Psi\| \to 0$ $(N \to \infty)$．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N_0 が存在して，$N \geq N_0$ ならば，$\|\Psi(N) - \Psi\| < \varepsilon$ が成り立つ．定理 1.24(ii) によって，各 $n = 1, \cdots, N_0$ に対して，$\Psi_n(k) \to \Psi_n$ $(k \to \infty)$ となる $\Psi_n(k) \in \mathsf{D}_n$ が存在する．したがって，番号 k_0 が存在して，$k \geq k_0$ ならば，$\|\Psi_n(k) - \Psi_n\|^2 < \varepsilon^2/N_0$．$\Phi(k) = \{\Psi_1(k), \cdots, \Psi_{N_0}(k), 0, 0, \cdots\}$ とすれば，$\Phi(k) \in \widehat{\bigoplus}_{n=1}^{\infty} \mathsf{D}_n$ であり，$\|\Phi(k) - \Psi(N_0)\| < \varepsilon$, $k \geq k_0$．3 角不等式により，$\|\Phi(k) - \Psi\| < 2\varepsilon$, $k \geq k_0$, が得られる．ゆえに，題意がしたがう． □

例 1.23 $l^2 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathbb{C}$.

1.2 線形演算子

一般に集合があたえられたとき，集合から集合への写像を考えるのは自然である、このことは，もちろん，ヒルベルト空間の場合にもあてはまる．ヒルベルト空間からヒルベルト空間への写像で基本的に重要なのは線形な写像である．この種の写像は線形演算子とよばれる．これは線形代数学において取り扱われる行列あるいは一次写像（変換）の一般化として得られる概念である．この節では，線形演算子の基本的性質を論述する.

1.2.1 基本概念

以下では，ヒルベルト空間といえば複素ヒルベルト空間をさすものとする[*14]．H, K を二つのヒルベルト空間（$\mathsf{H} = \mathsf{K}$ の場合も含む），D を H の部分空間とす

[*14] 実ヒルベルト空間の場合もある部分までは全く並行的に論じられる.

る．A を D から K への写像，すなわち，D の各ベクトル Ψ に対して，K のベクトル $A(\Psi)$ をひとつ定める対応とする（このことを $A : \mathsf{D} \to \mathsf{K}$ と記す）．すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}, \alpha \in \mathbb{C}$, に対して，

$$A(\Psi + \Phi) = A(\Psi) + A(\Phi), \qquad A(\alpha\Psi) = \alpha A(\Psi), \tag{1.46}$$

が成立するとき，A は**線形** (linear) であるといい，A を H から K への**線形演算子** (linear operator) という．この場合，D を A の**定義域** (domain) とよび，$\mathsf{D} = \mathsf{D}(A)$ と記す．線形演算子のことを**線形作用素**あるいは**線形変換**（**一次変換**）(linear transformation) ともいう．ベクトル $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$A(\Psi) \in \mathsf{K}$ を A による Ψ の**像**，Ψ から $A(\Psi)$ を得る働きを Ψ に対する A の**作用**という．

H から K への線形演算子 A について，(1.46) を繰り返し用いることにより，すべての $\Psi_j \in \mathsf{D}(A), \alpha_j \in \mathbb{C}, j = 1, \cdots, n,\ n \in \mathbb{N}$, に対して，

$$A\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \Psi_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j A(\Psi_j) \tag{1.47}$$

が成立することがわかる．

便宜上，H からそれ自体への線形演算子を H 上の線形演算子ということにする．ただし，こういったからといって，そのような線形演算子の定義域は H 全体であるとは限らないことに注意されたい．線形演算子の定義域の概念は，H 全体では定義され得ないような線形演算子をきちんと扱うために必要とされる．その重要性は，本書の叙述が進む中で徐々に明らかになるはずである．

本書では，線形演算子しか扱わないので，線形演算子のことをしばしば単に演算子とよぶ．また，記号上の簡略化のため，$A(\Psi) = A\Psi$ というふうにも記す．

線形演算子のうちで最も単純なものは，H の各ベクトル Ψ に Ψ 自体を対応させる写像 I_{H} である：

$$I_{\mathsf{H}}\Psi := \Psi. \tag{1.48}$$

この写像を H 上の**恒等演算子** (identity) あるいは**単位演算子**という．どのヒルベルト空間の恒等演算子かが明らかな場合は，I_{H} を単に I と記す．

また，H のすべてのベクトルを K の零ベクトル 0_{K} にうつす演算子を**零演算子** (null operator) といい，記号的に 0 で表わす：$0\Psi := 0_{\mathsf{K}}, \Psi \in \mathsf{H}$.

例 1.24　$M = (M_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ を n 次の複素正方行列とする．任意の $z \in \mathbb{C}^n$ に対して，$w_i = \sum_{j=1}^n M_{ij} z_j, \ i = 1, \cdots, n$, とすれば，対応 $z \to w$ は $\mathbb{C}^n$ 上の線形演算子を定義する．この演算子を同じ記号 M で表わし—したがって，$w = Mz$— 行列 M から定まる演算子という．

例 1.25　d 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数で台が有界なものの全体を $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする（付録 B の B.1 節を参照）．$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ への写像 $\partial_j \ (j = 1, \cdots, d)$ を

$$(\partial_j f)(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d,$$

によって定義する．この写像は線形である．したがって，∂_j は $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を定義域とする，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形演算子である．同様に，任意の自然数 n に対して，

$$(\partial_j^n f)(x) = \frac{\partial^n f(x)}{\partial x_j^n}, \quad x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d, f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d),$$

に定義される写像は，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を定義域とする，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の線形演算子である．この種の線形演算子を**偏微分演算子** (partial differential operator) という．

例 1.26　$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を σ 有限な測度空間，F を X 上の B-可測関数で測度 μ に関して a.e.（ほとんどいたるところ）有限であるとする[*15]．これに対して，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ 上の線形演算子 M_F が次のように定義される：

$$\text{定義域：} \ \mathsf{D}(M_F) := \left\{ f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu) \middle| \int_{\mathsf{X}} |F(x) f(x)|^2 d\mu(x) < \infty \right\},$$

$$\text{作用：} \ (M_F f)(x) := F(x) f(x), \quad \text{a.e.}x, \ f \in \mathsf{D}(M_F).$$

線形演算子 M_F を関数 F による**かけ算演算子** (multiplication operator) という．

[*15] たとえば，$\mathsf{X} = \mathbb{R}^d$, $\mathsf{B} = \mathsf{B}^d$ ($\mathbb{R}^d$ のボレル集合体)，$\mu = \mu_L^d$ (d 次元ルベーグ測度)，F は $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数．

線形演算子に関する基本的な概念を定義しよう.

H から K への二つの線形演算子 A, B について，次の二つの条件 (i), (ii) がみたされるとき，A と B は等しいといい，$A = B$ と記す：(i) $\mathsf{D}(A) = \mathsf{D}(B)$（定義域が等しい）; (ii) すべての $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ $[= \mathsf{D}(B)]$ に対して $A\Psi = B\Psi$（作用が等しい）.

A を H から K への線形演算子とする.

$\Psi \neq \Phi$ であるような $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$A\Psi \neq A\Phi$ であるとき，A は **1 対 1** (one-to-one) あるいは**単射** (injective) であるという．これは，言い換えれば，$A\Psi = A\Phi$ $[\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A)]$（像が等しい）ならば，$\Psi = \Phi$ が成立する（もとのベクトルも等しい）ということである.

A を作用させると零ベクトルとなるような（$\mathsf{D}(A)$ に属する）ベクトルの集合

$$\ker A := \{\Psi \in \mathsf{D}(A) | A\Psi = 0\} \tag{1.49}$$

を A の**核** (kernel) あるいは**零空間** (null space) という．A の線形性によって，$\ker A$ は H の部分空間であることがわかる．この空間を用いて，線形演算子の単射性を特徴づけることができる：

命題 1.26　A が単射であるための必要十分条件は，$\ker A = \{0\}$ となることである.

証明　条件の必要性の証明は簡単である ($A0 = 0$ に注意)．十分性を示そう．$\ker A = \{0\}$ とする．$A\Psi = A\Phi$ $[\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A)]$ とすれば，線形性により，$A(\Psi - \Phi) = 0$．したがって，仮定により，$\Psi - \Phi = 0$，すなわち，$\Psi = \Phi$．ゆえに A は単射である.　□

例 1.27　例 1.26 の関数 F に対して，$\mathsf{N}_F := \{x \in \mathsf{X} | F(x) = 0\}$ とおく．もし，$\mu(\mathsf{N}_F) = 0$ ならば，M_F は単射である.

証明　$f \in \ker M_F$ ならば，$F(x)f(x) = 0$, a.e.x．仮定により，$F(x) \neq 0$, a.e.x．したがって，$f(x) = 0$, a.e.x．ゆえに，$f = 0$.　□

線形演算子 A による像の全体

$$\mathsf{R}(A) := \{A\Psi | \Psi \in \mathsf{D}(A)\} \tag{1.50}$$

は K の部分空間である．この部分空間を A の**値域** (range) という．

$\mathsf{R}(A) = \mathsf{K}$ が成立するとき，A は**全射** (surjective) であるという．これは，任意の $\Phi \in \mathsf{K}$ に対して，$A\Psi = \Phi$ となる $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ が存在するということと同じである．

線形演算子 A が全射であり，かつ単射ならば，A は**全単射** (bijective) であるという．

例 1.28 例 1.25 の演算子 ∂_j は単射であるが，全射ではない．

証明 $j = 1$ の場合だけを示す (他の場合も同様)[*16]. $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ に対して，$\widetilde{x} = (x_2, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ とおく．微積分学の基本定理により，任意の $x \in \mathbb{R}^d$ と $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，$f(x) = f(0, \widetilde{x}) + \int_0^{x_1} \partial_1 f(t, \widetilde{x})dt$. いま，$f \in \ker \partial_1$ とすれば，$\partial_1 f(x) = 0$, a.e.x, であるから[*17]，$\int_0^{x_1} \partial_1 f(t, \widetilde{x})dt = 0$, a.e.$\widetilde{x}$. したがって，$f(x) = f(0, \widetilde{x})$, a.e.$\widetilde{x} \cdots (*)$. x_1 は任意であったから，$x_1 \to \infty$ とすれば，左辺は 0 になる．右辺は x_1 によらないから，$f(0, \widetilde{x}) = 0$, a.e.$\widetilde{x}$, を得る．そこで，再び，式 $(*)$ にもどれば，$f = 0$ ($\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の等式) がしたがう．ゆえに，$\ker \partial_1 = \{0\}$. これと命題 1.26 により，∂_1 は単射である．

$\mathsf{R}(\partial_j) \subset \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ であるから，∂_j は全射ではない． □

例 1.29 F を例 1.26 のものとする．定数 $c > 0$ が存在して，$|F(x)| \geq c$, a.e.x, ならば，M_F は全単射である．

証明 M_F の単射性は，例 1.27 の結果による．任意の $g \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，$f(x) = F(x)^{-1}g(x)$, a.e.x, とおけば，

$$\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^2 d\mu(x) \leq c^{-2} \int_{\mathsf{X}} |g(x)|^2 d\mu(x) < \infty,$$

$$\int_{\mathsf{X}} |F(x)f(x)|^2 d\mu(x) = \int_{\mathsf{X}} |g(x)|^2 d\mu(x) < \infty.$$

したがって，$f \in \mathsf{D}(M_F)$ であり，$M_F f = g$ が成り立つ．これは M_F が全射であることを意味する． □

[*16] 関数 g を $g(x_j, x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_d) = f(x_1, \cdots, x_d)$ によって定義すれば，$\partial_j f = 0$ は $\partial_1 g = 0$ と同値であるから，$j = 1$ の場合だけを示せば十分なのである．

[*17] いまの場合，$\partial_j f = 0$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ での等号であるから，$\partial_j f(x) = 0$, a.e.x, しか言えないことに注意．

B をヒルベルト空間 K からヒルベルト空間 X への線形演算子とする．このとき，

$$\mathsf{D}(BA) := \{\Psi \in \mathsf{D}(A) | A\Psi \in \mathsf{D}(B)\}$$

は H の部分空間である（この部分空間は，言葉で述べれば，A の定義域に属するベクトル Ψ のうち，$A\Psi$ が B の定義域にはいるものの全体である）．各 $\Psi \in \mathsf{D}(BA)$ に対して，$(BA)(\Psi) \in \mathsf{X}$ を

$$(BA)(\Psi) = B(A\Psi)$$

によって定義すれば，これから定まる対応 $BA : \Psi \to (BA)(\Psi)$ は，$\mathsf{D}(BA)$ を定義域とする，H から X への線形演算子である．これを A と B の**積** (product) とよぶ．

演算子 A が単射ならば，任意の $\Phi \in \mathsf{R}(A)$ に対して，$A\Psi = \Phi$ となる $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ がただひとつ存在する．したがって，対応：$\Phi \to \Psi$ は $\mathsf{R}(A)$ から H への写像を定める．この写像を A の**逆演算子** (inverse operator) とよび，A^{-1} で表わす：$A^{-1}\Phi := \Psi$．A^{-1} は，定義域を $\mathsf{R}(A)$ とする，K から H への線形演算子である．定義から，すべての $\Phi \in \mathsf{R}(A), \Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して

$$AA^{-1}\Phi = \Phi, \quad A^{-1}A\Psi = \Psi, \tag{1.51}$$

が成立することがわかる．

例 1.30 例 1.29 の演算子 M_F の逆演算子は，

$$(M_F^{-1}f)(x) = F(x)^{-1}f(x), \ \text{a.e.}x, \ f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu),$$

という形であたえられる．

線形演算子の 3 個以上の積は，次のようにして帰納的に定義される．$n \geq 2$ とし，$\mathsf{H}_j, j = 1, \cdots, n+1$, をヒルベルト空間，$A_j : \mathsf{H}_j \to \mathsf{H}_{j+1}$ $(j = 1, \cdots, n)$ を H_j から H_{j+1} への線形演算子とする．このとき，$A_3(A_2A_1)$（A_2A_1 と A_3 の積）は，上に述べた定義から，

$$\begin{aligned}\mathsf{D}(A_3A_2A_1) :=& \ \{\Psi \in \mathsf{D}(A_2A_1) | (A_2A_1)\Psi \in \mathsf{D}(A_3)\} \\ =& \ \{\Psi \in \mathsf{D}(A_1) | A_1\Psi \in \mathsf{D}(A_3A_2)\}\end{aligned}$$

を定義域とする，H_1 から H_4 への線形演算子である．この場合，

$$(A_3(A_2A_1))\Psi = A_3((A_2A_1)(\Psi)) = A_3(A_2(A_1\Psi))$$

が成り立つ．そこで，$A_3(A_2A_1) = A_3A_2A_1$ と記す．以下，同様にして，線形演算子 $A_n \cdots A_1 : \mathsf{H}_1 \to \mathsf{H}_{n+1}$ が帰納的に，

$$\mathsf{D}(A_n \cdots A_1) = \{\Psi \in \mathsf{D}(A_{n-1} \cdots A_1) | A_{n-1} \cdots A_1\Psi \in \mathsf{D}(A_n)\}, \tag{1.52}$$

$$(A_nA_{n-1} \cdots A_1)(\Psi) = A_n((A_{n-1} \cdots A_1)\Psi),\ \Psi \in \mathsf{D}(A_n \cdots A_1), \tag{1.53}$$

によって定義される．

A が H 上の線形演算子のとき，A の有限個の積を A の**べき乗**あるいは**累乗**といい，

$$\underbrace{A \cdots A}_{n\ \text{個}} = A^n \tag{1.54}$$

と記す．これを A の $\boldsymbol{n}$ **乗**という．この演算子の定義域は

$$\mathsf{D}(A^n) = \{\Psi \in \mathsf{D}(A) | A\Psi \in \mathsf{D}(A^{n-1})\} \tag{1.55}$$

である．便宜上，$A^0 := I$ とおく．

部分空間 $\mathsf{D} \subset \mathsf{H}$ について，$\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(A)$ かつ任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して，$A\Psi \in \mathsf{D}$ が成り立つとき,「A は D を**不変にする**」あるいは「D は A **不変**である」という．このような部分空間 D を A のひとつの**不変部分空間**（invariant subspace）という．

たとえば，例 1.25 の偏微分演算子 $\partial_j^n (n \in \mathbb{N})$ はその定義域 $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を不変にする．

線形演算子 A が部分空間 D を不変にするとき，D の任意のベクトルに対して，A は何度でも作用することができる．すなわち, $\mathsf{D} \subset \cap_{n=1}^\infty \mathsf{D}(A^n)$ が成り立つ．

H から K への線形演算子 A, B に対して，$\mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ は H の部分空間である．$\mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ から，K への写像 $A + B$ を

$$(A + B)(\Psi) = A\Psi + B\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B) \tag{1.56}$$

によって定義する．この写像は線形である．したがって，$A+B$ は，$\mathsf{D}(A)\cap\mathsf{D}(B)$ を定義域とする，H から K への線形演算子である．この線形演算子 $A+B$ を A と B の**和** (sum) とよぶ．明らかに，$A+B=B+A$ が成立する．

任意の $\alpha\in\mathbb{C}$ に対して，

$$(\alpha A)(\Psi):=\alpha A\Psi, \quad \Psi\in\mathsf{D}(A), \tag{1.57}$$

とすれば，αA は，$\mathsf{D}(A)$ を定義域とする，H から K への線形演算子である．この線形演算子 αA を A **の** α **倍**という．任意の $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対して，

$$(\alpha\beta)A=\alpha(\beta A) \tag{1.58}$$

が成り立つ．また，すべての自然数 n に対して，

$$nA=\underbrace{A+\cdots+A}_{n\text{ 個}} \tag{1.59}$$

が成立する．

1.2.2 有界演算子と非有界演算子

ヒルベルト空間上の線形演算子は大きく分けて二つに分類される．すなわち，有界演算子と非有界演算子である．まず，有界演算子の定義から述べよう．

A をヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への線形演算子とする．ある定数 $C>0$ があって，

$$\|A\Psi\|_{\mathsf{K}}\le C\|\Psi\|_{\mathsf{H}}, \quad \Psi\in\mathsf{D}(A), \tag{1.60}$$

が成立するならば，A は**有界**であるという．有界な演算子を**有界演算子** (bounded operator) という．有界でない線形演算子を**非有界演算子** (unbounded operator) とよぶ．

線形演算子 A が有界のとき，(1.60) によって，

$$\|A\|:=\sup_{\Psi\neq 0,\Psi\in\mathsf{D}(A)}\frac{\|A\Psi\|_{\mathsf{K}}}{\|\Psi\|_{\mathsf{H}}} \tag{1.61}$$

は有限である．これを A の**ノルム**という．したがって

$$\|A\Psi\|_{\mathsf{K}} \le \|A\| \, \|\Psi\|_{\mathsf{H}}, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A), \tag{1.62}$$

が成立する．

有界演算子のノルムについて次の事実を注意しておこう：

命題 1.27 A が有界のとき，

$$\|A\| = \sup_{\Psi \in \mathsf{D}(A), \|\Psi\|=1} \|A\Psi\|_{\mathsf{K}}. \tag{1.63}$$

証明 (1.63) の右辺の量を a とする．(1.62) で $\|\Psi\| = 1$ の場合を考えると，$a \le \|A\| \cdots (*)$ がでる．逆の不等式を示すために，a の定義によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，単位ベクトル $\Psi_\varepsilon \in \mathsf{D}(A)$ が存在して，$a - \varepsilon < \|A\Psi_\varepsilon\|$ が成り立つ．(1.62) によって，$\|A\Psi_\varepsilon\| \le \|A\|$ であるから，$a - \varepsilon < \|A\|$．そこで，$\varepsilon \to 0$ とすれば，$a \le \|A\|$．これと $(*)$ をあわせれば (1.63) を得る． □

命題 1.27 は有界演算子 A のノルムを計算する場合に，$\mathsf{D}(A)$ の単位ベクトルだけについて，$\|A\Psi\|_{\mathsf{K}}$ を計算し，その上限を考えればよいことを示している．

例 1.31 有限階の演算子 (finite rank operator)．ヒルベルト空間 H において，ベクトル $\Phi_0 \ne 0$ を固定し，写像 $A_0 : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ を

$$A_0\Psi = \langle \Phi_0, \Psi \rangle \Phi_0, \quad \Psi \in \mathsf{H},$$

によって定義すると，これは，H 全体を定義域とする線形演算子である．また，シュヴァルツの不等式により，$\|A_0\Psi\| \le \|\Phi_0\|^2 \|\Psi\|$ であるから，A_0 は有界であって，$\|A_0\| \le \|\Phi_0\|^2$ が成り立つ．一方，$\|A_0\Phi_0\| = \|\Phi_0\|^3$ であるから，$\|A_0\| \ge \|\Phi_0\|^2$．よって，$\|A_0\| = \|\Phi_0\|^2$．

演算子 A_0 の一般化を考えよう．Φ_j，$\Phi'_j \in \mathsf{H}$，$j = 1, \cdots, N$，を固定されたベクトルとし，写像 $A : \mathsf{H} \to \mathsf{H}$ を

$$A\Psi = \sum_{j=1}^{N} \langle \Phi'_j, \Psi \rangle \Phi_j, \quad \Psi \in \mathsf{H},$$

によって定義すると，これは H 全体を定義域とする線形演算子である．3 角不等式とシュヴァルツの不等式によって，

$$\|A\Psi\| \le \left(\sum_{j=1}^{N} \|\Phi_j'\|\,\|\Phi_j\|\right)\|\Psi\|.$$

したがって，A は有界であり，$\|A\| \le \sum_{j=1}^{n} \|\Phi_j'\|\,\|\Phi_j\|$ が成り立つ．明らかに，$\dim \mathsf{R}(A) \le N < \infty$.

この例のように，値域が有限次元であるような線形演算子を**有限階の演算子**という．

例 1.32　ヒルベルト-シュミット型積分演算子 (integral operator of Hilbert-Schmidt type)．$k(x,y)$ を $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数で，

$$\|k\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} |k(x,y)|^2 dx\otimes dy < \infty$$

をみたすものとする（$dx \otimes dy$ は $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度）．このとき，フビニの定理（付録 A を参照）によって，$\int_{\mathbb{R}^d} k(x,y)|^2 dy < \infty$, a.e. x，であり，

$$\|k\|_2^2 := \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |k(x,y)|^2 dy\right)dx$$

が成り立つ．任意の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，シュヴァルツの不等式によって，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |k(x,y)f(y)|dy \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |k(x,y)|^2 dy\right)^{1/2} \|f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} < \infty, \quad \text{a.e. } x.$$

そこで，

$$(A_k f)(x) := \int_{\mathbb{R}^d} k(x,y)f(y)dy$$

とおけば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(A_k f)(x)|^2 dx \le \int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_{\mathbb{R}^d} |k(x,y)|^2 dy\right)dx \|f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)}^2 = \|k\|_2^2 \|f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)}^2.$$

したがって，A_k は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界演算子であり $[\mathsf{D}(A_k) = \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)]$,

$$\|A_k\| \le \|k\|_2$$

が成り立つ．演算子 A_k を関数 $k(x,y)$ を**積分核** (integral kernel) とする**ヒルベルト-シュミット型積分演算子**という．

有界演算子の他の例については，章末演習問題を参照．

非有界な演算子は次の命題によって特徴づけられる．

命題 1.28 ヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への線形演算子 A が非有界であるための必要十分条件は，$\mathsf{D}(A)$ に属する単位ベクトルの列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{D}(A)$ ($\|\Psi_n\| = 1, n \in \mathbb{N}$) で $\|A\Psi_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$ をみたすものが存在することである．

証明 （必要性）A が非有界ならば，(1.60) をみたす定数 C は存在しないわけであるから，各 $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\|A\Phi_n\| \geq n\|\Phi_n\|$ をみたす，零でないベクトル $\Phi_n \in \mathsf{D}(A)$ が存在する．この場合，$\Psi_n = \Phi_n/\|\Phi_n\|$ とおけば，$\Psi_n \in \mathsf{D}(A)$, $\|\Psi_n\| = 1$ であり，$\|A\Psi_n\| \geq n$ であるから，$\|A\Psi_n\| \to \infty$ $(n \to \infty)$.

（十分性）題意にいうベクトル列 $\{\Psi_n\}_n$ が存在したとすれば，任意の $R > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$\|A\Psi_n\| \geq R$. これは，(1.60) をみたす定数 C の非存在を意味する． □

例 1.33 M_F を例 1.26 で定義した演算子とする．結論から言うと，演算子 M_F の性質は関数 F が本質的に有界な場合とそうでない場合とでは異なる．そこで二つの場合に分けて述べる．

(1) **F が本質的に有界な場合**．これは，F の**本質的上限**

$$\|F\|_\infty := \mathrm{ess.sup}_{x \in \mathsf{X}} |F(x)| \tag{1.64}$$

が有限な場合である（付録 A の A.2 節，例 A.11 を参照）．このとき，すべての $f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ に対し

$$\int_{\mathsf{X}} |F(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu(x) \leq \|F\|_\infty^2 \int_{\mathsf{X}} |f(x)|^2 d\mu(x) \quad < \infty. \tag{1.65}$$

したがって，$f \in \mathsf{D}(M_F)$. これは，$\mathsf{D}(M_F) = \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ を意味する．つまり，F が本質的に有界なときは，M_F の定義域は $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ 全体である．さらに，

(1.65) は

$$\|M_F f\| \le \|F\|_\infty \|f\|$$

を導くので，M_F は有界演算子であって，

$$\|M_F\| \le \|F\|_\infty \tag{1.66}$$

が成り立つ．

(2) **F が本質的に有界でない場合．** このとき，次の事実が証明される：

(i) $\mathsf{D}(M_F)$ は $L^2(X, d\mu)$ 全体にはなり得ない．

(ii) $\mathsf{D}(M_F)$ は稠密である．

(iii) M_F は非有界である．

まず，(i) を証明しよう．各 $n = 1, 2, \cdots,$ に対して集合

$$\mathsf{K}_n = \{x \in X | n - 1 \le |F(x)| < n\}$$

を考える．明らかに，$n \ne m$ ならば $\mathsf{K}_m \cap \mathsf{K}_n = \emptyset$ である．F は本質的に有界でないから，$\mu(\mathsf{K}_n) \ne 0$ なる K_n は無限個ある．そのような K_n を順に $\{\mathsf{K}_{n_j}\}_{j=1}^\infty$ とする．X は σ 有限であるから，

$$\mathsf{X} = \cup_{m=1}^\infty \mathsf{X}_m, \quad \mu(\mathsf{X}_m) < \infty, \quad \mathsf{X}_m \subset \mathsf{X}_{m+1},$$

をみたす可測集合 X_m が存在する．したがって，適当に番号 m_j を選べば，

$$a_j := \mu(\mathsf{K}_{n_j} \cap \mathsf{X}_{m_j}) > 0$$

となるようにできる．$\mathsf{K} = \cup_{j=1}^\infty \mathsf{K}_{n_j} \cap \mathsf{X}_{m_j}$ とおき，X 上の関数 f を次のように定義する：$x \in \mathsf{K}_{n_j} \cap X_{m_j}$ ならば，$f(x) = (n_j\sqrt{a_j})^{-1}$ とし，$x \notin \mathsf{K}$ ならば，$f(x) = 0$ とする．このとき

$$\int_\mathsf{X} |f(x)|^2 d\mu(x) = \sum_{j=1}^\infty \int_{\mathsf{K}_{n_j} \cap \mathsf{X}_{m_j}} |f(x)|^2 d\mu(x) = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{n_j^2} < \infty.$$

したがって，$f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$. 一方，任意の $N \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathsf{X}} |F(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu(x) &\geq \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathsf{K}_{n_j} \cap \mathsf{X}_{m_j}} |F(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu(x) \\ &\geq \sum_{j=1}^{N} (n_j - 1)^2 \cdot \frac{1}{n_j^2} = N - 2\sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n_j} + \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{n_j^2}\end{aligned}$$

そこで，$N \to \infty$ とすれば，$\int_{\mathsf{X}} |F(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu(x) = +\infty$ が導かれる．ゆえに，$f \notin \mathsf{D}(M_F)$. したがって $\mathsf{D}(M_F) \neq \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$.

次に (ii) を示す．自然数 N に対して，集合 $\mathsf{J}_N := \cup_{n=1}^{N} \mathsf{K}_n$ の定義関数を χ_N とする．任意の $f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，$f_N = \chi_N f$ とおけば，$f_N \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ であり，

$$\begin{aligned}\int_{\mathsf{X}} |F(x) f_N(x)|^2 d\mu(x) &= \int_{\mathsf{J}_N} |F(x)|^2 |f(x)|^2 d\mu(x) \\ &\leq N^2 \int_{\mathsf{J}_N} |f(x)|^2 d\mu(x) < \infty\end{aligned}$$

であるから，$f_N \in \mathsf{D}(M_F)$ である．さらに，

$$\|f_N - f\|^2_{\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)} = \int_{|F(x)| \geq N} |f(x)|^2 d\mu(x)$$

であり，$|f(x)|^2$ は μ について可積分であり，$|F(x)| < \infty$, μ-a.e.x であるから，右辺は，$N \to \infty$ のとき，0 に収束する．したがって，$\mathsf{D}(M_F)$ は稠密である．

最後に (iii) を証明しよう．関数列 $\{f_j\}_j$ を次のように定義する：

$$f_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a_j}} & ; x \in K_{n_j} \cap \mathsf{X}_{m_j} \text{ のとき,} \\ 0 & ; x \notin \mathsf{K}_{n_j} \cap \mathsf{X}_{m_j} \text{ のとき} \end{cases}.$$

このとき，$f_j \in \mathsf{D}(M_F)$, $\|f_j\| = 1$ であり，

$$\|M_F f_j\|^2 = \int_{\mathsf{K}_{n_j} \cap \mathsf{X}_{m_j}} \frac{|F(x)|^2}{a_j} d\mu(x) \geq (n_j - 1)^2 \longrightarrow \infty \quad (j \to \infty).$$

ゆえに，命題 1.28 によって，M_F は非有界である． □

例 1.34　(i) かけ算演算子で非有界なものの具体的な例として，$\mathbb{R}^d$ 上の座標関数 x_j による，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のかけ算演算子 M_{x_j} がある．

(ii) 例 1.25 でとりあげた，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の偏微分演算子 ∂_j は非有界である．

証明　$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d), \|f\| = 1, \|\partial_j f\| \neq 0,$ をみたす f をひとつとる．$n \in \mathbb{N}$ に対して，$f_n(x) = n^{d/2} f(nx)$ とおく．このとき，$f_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d), \|f_n\| = 1$ であり，$(\partial_j f_n)(x) = nn^{d/2}(\partial_j f)(nx)$．したがって，$\|\partial_j f_n\| = n\|\partial_j f\| \to \infty$ $(n \to \infty)$．ゆえに，命題 1.28 によって，∂_j は非有界である．　□

(iii) (ii) の場合と同様にして，任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の偏微分演算子 ∂_j^n も非有界であることが示される．

有界演算子の重要な性質として次のものがある：

命題 1.29　A を H から K への有界演算子とする．このとき，$\Psi_n, \Psi \in \mathsf{D}(A)$ かつ $\Psi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$ ならば，

$$\lim_{n\to\infty} A\Psi_n = A\Psi.$$

証明　A の線形性と (1.62) により，

$$\|A\Psi_n - A\Psi\| \leq \|A\|\|\Psi_n - \Psi\| \to 0 \ (n \to \infty).$$

□

命題 1.29 にいう有界演算子の性質を有界演算子の**連続性**という．

次の定理は，非有界な演算子の概念は無限次元のヒルベルト空間の場合にのみ意味をもつことを示す：

定理 1.30　H, K を有限次元のヒルベルト空間とする．このとき，H から K への線形演算子はすべて有界である．

証明　A を H から K への線形演算子とする．$\mathsf{D}(A)$ は有限次元の部分空間であるから，閉部分空間である（グラム-シュミットの直交化により，例 1.17 の

議論が適用できる）．したがって，証明にあたっては，$\mathsf{D}(A) = \mathsf{H}$ として一般性を失わない．$\dim \mathsf{H} = N, \dim \mathsf{K} = M$ とし，H, K の正規直交基底を，それぞれ，$\{\Psi_n\}_{n=1}^N, \{\Phi_m\}_{m=1}^M$ とする．このとき，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ は $\Psi = \sum_{n=1}^N \alpha_n \Psi_n, \alpha_n = \langle \Psi_n, \Psi \rangle$, と書ける．したがって，$A\Psi = \sum_{n=1}^N \alpha_n A\Psi_n$. 一方，

$$A\Psi_n = \sum_{m=1}^M A_{mn}\Phi_m, \quad A_{mn} = \langle \Phi_m, A\Psi_n \rangle,$$

と表わされる．したがって，$A\Psi = \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=1}^N A_{mn}\alpha_n \right) \Phi_m$. ゆえに，

$$\begin{aligned} \|A\Psi\|^2 &= \sum_{m=1}^M \left| \sum_{n=1}^N A_{mn}\alpha_n \right|^2 \\ &\leq \sum_{m=1}^M \left(\sum_{n=1}^N |A_{mn}|^2 \right) \left(\sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \right) \\ &\qquad \text{(コーシー – シュヴァルツの不等式)} \\ &= \left(\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |A_{mn}|^2 \right) \|\Psi\|^2. \quad \text{(パーセヴァルの等式)} \end{aligned}$$

これは，A が有界であり，

$$\|A\| \leq \sqrt{\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M |A_{mn}|^2} \tag{1.67}$$

が成立することを示している．□

1.2.3　演算子の拡大と有界演算子に対する拡大定理

定義域がヒルベルト空間全体ではないような演算子（特に，非有界演算子）を扱う際に重要となる概念を定義しておこう．H, K をヒルベルト空間とする．H から K への演算子 A, B について，$\mathsf{D}(A) \subset \mathsf{D}(B)$ かつすべての $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$A\Psi = B\Psi$ が成り立つとき，B は A の**拡大** (extension) あるいは A は B の**制限 (縮小)**(restriction) であるいい，このことを記号的に

$$A \subset B$$

と表わす．この場合，$\mathsf{D}(A) \neq \mathsf{D}(B)$ ならば，B は A の真の（非自明）な拡大であるという．

H から K への二つの演算子 A, B について，$A = B$ であることは，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ と同値である．

D を $\mathsf{D}(A)$ の部分空間とするとき，D を定義域とする演算子 A_{D} が $A_{\mathsf{D}}\Psi = A\Psi$, $\Psi \in \mathsf{D}$, によって定義される．明らかに，$A_{\mathsf{D}} \subset A$．演算子 A_{D} を A の D への**制限**といい，$A_{\mathsf{D}} = A \restriction \mathsf{D}$ と記す．

例 1.35　自然数 m に対して，m 回連続微分可能な，$\mathbb{R}^d$ 上の関数で有界な台をもつものの全体を $\mathsf{C}_0^m(\mathbb{R}^d)$ で表わす．$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ において，演算子 $\partial_{j,1}$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\partial_{j,1}) &= \mathsf{C}_0^1(\mathbb{R}^d), \\ (\partial_{j,1} f)(x) &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}, \quad f \in \mathsf{D}(\partial_{j,1}). \end{aligned}$$

このとき，$\partial_j \subset \partial_{j,1}$, $\partial_j = \partial_{j,1} \restriction \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$．この例では，$\partial_j, \partial_{j,1}$ の作用の形は同じであるが，定義域が違うので，演算子としては，それらは等しくない．すなわち，$\partial_j \neq \partial_{j,1}$．

H から K への演算子 A の定義域 $\mathsf{D}(A)$ が稠密なとき，A は**稠密に定義されている** (densely defined) という．稠密に定義されている有界演算子は，ヒルベルト空間全体を定義域とする有界演算子に一意的に拡大される．これを述べたのが次の定理である．

定理 1.31　拡大定理． A を H から K への稠密に定義された有界演算子とする．このとき，H 全体を定義域とする，H から K への有界演算子 $\widetilde{A}$ で

$$A \subset \widetilde{A}, \tag{1.68}$$

$$\|A\| = \|\widetilde{A}\| \tag{1.69}$$

をみたすものがただひとつ存在する．

証明 $\mathsf{D}(A)$ は稠密だから，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\Psi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$ となる点列 $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A)$ がとれる．A の有界性により

$$\|A\Psi_n - A\Psi_m\| \leq \|A\| \, \|\Psi_n - \Psi_m\| \to 0 \ (n, m \to \infty).$$

したがって，$\{A\Psi_n\}_n$ は K におけるコーシー列である．ゆえに，$\lim_{n\to\infty} A\Psi_n = \Phi$ となる $\Phi \in \mathsf{K}$ が存在する．この場合，極限 Φ は，Ψ を近似する $\{\Psi_n\}_n$ の選び方によらない．実際，$\Psi'_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$ となるもうひとつの点列があったとし，$\lim_{n\to\infty} A\Psi'_n = \Phi'$ とすれば，3 角不等式によって

$$\begin{aligned}
\|\Phi - \Phi'\| &\leq \|\Phi - A\Psi_n\| + \|A\Psi_n - A\Psi'_n\| + \|A\Psi'_n - \Phi'\| \\
&\leq \|\Phi - A\Psi_n\| + \|A\| \, \|\Psi_n - \Psi'_n\| + \|A\Psi'_n - \Phi'\| \\
&\to 0 \ (n \to \infty).
\end{aligned}$$

したがって，$\Phi = \Phi'$. こうして，各 $\Psi \in \mathsf{H}$ に対してベクトル $\Phi \in \mathsf{K}$ がただひとつ定まる．この写像を $\widetilde{A}$ とする．$\widetilde{A}\Psi := \Phi = \lim_{n\to\infty} A\Psi_n$. A の線形性は $\widetilde{A}$ の線形性を導く．したがって，$\widetilde{A}$ は H 全体を定義域とする線形演算子である．$\|A\Psi_n\| \leq \|A\| \, \|\Psi_n\|$ であるから，$n \to \infty$ として，$\|\widetilde{A}\Psi\| \leq \|A\| \, \|\Psi\|$ を得る．これは，$\widetilde{A}$ が有界であることを示すと同時に，不等式 $\|\widetilde{A}\| \leq \|A\| \cdots (*)$ もあたえる．$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ ならば，$\Psi_n = \Psi$ と選ぶことにより，(1.68) が成り立つ．演算子のノルムの定義から，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある単位ベクトル $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ が存在して，$\|A\| - \varepsilon \leq \|A\Psi\|$. $A \subset \widetilde{A}$ により，$\|A\Psi\| = \|\widetilde{A}\Psi\| \leq \|\widetilde{A}\|$. したがって，$\|A\| - \varepsilon \leq \|\widetilde{A}\|$. ε は任意であったから $\|A\| \leq \|\widetilde{A}\|$ となる．これと $(*)$ をあわせると (1.69) を得る． □

上の定理によって，稠密に定義された有界演算子はヒルベルト空間全体で定義されているとして一般性を失わない．以下では，**特に断わらない限り，有界演算子の定義域はヒルベルト空間全体であるとする．**

1.2.4 有界演算子の空間と C. ノイマンの定理

有界演算子を考察する有効な方法のひとつとして，有界演算子全体がつくる空間の構造を研究する観点がある．H から K への有界演算子の全体を $\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$

によって表わす．1.2.1 項の終わりの方で述べたように，演算子に対して和とスカラー倍が定義された．その定義から，任意の $A, B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$A+B$, $\alpha A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ であり

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \quad (3\text{ 角不等式}), \tag{1.70}$$

$$\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|, \tag{1.71}$$

が成り立つことを示すのは容易である．この事実から，$\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ はベクトル空間になることがわかる．この場合，$\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ の零ベクトルは零演算子である．さらに

$$\|A\| = 0 \Longrightarrow A = 0 \tag{1.72}$$

が成り立つことも演算子ノルムの定義から容易にわかる．

有界演算子のノルムを利用することにより，内積空間の場合と同様にして，$\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ の中に位相的概念を導入することができる．$\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ の点列 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ が存在して，$\|A_n - A\| \to 0$ $(n \to \infty)$ であるならば，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ は A に**収束**するいう．この場合，A を $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**極限**といい，$\lim_{n\to\infty} A_n = A$ と記す．収束する点列を**収束列**という．性質 (1.72) のおかげで，収束列の極限はただひとつに定まる．

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ の点列とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある番号 n_0 が存在して，$n, m \geq n_0$ ならば

$$\|A_n - A_m\| < \varepsilon \tag{1.73}$$

となるとき，$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を**基本列**あるいは**コーシー列**という．次の事実は重要である．

定理 1.32 $\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ の任意のコーシー列は収束列である．

証明 $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ の任意のコーシー列としよう．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 が存在して，$n, m \geq n_0$ ならば (1.73) が成立する．内積空間の場合と同様に，$\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ のコーシー列も有界である．すなわち，ある

定数 $C>0$ が存在して，$\|A_n\| \le C,\ n \ge 1$．(1.73) から，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して

$$\|A_n\Psi - A_m\Psi\| \le \varepsilon\|\Psi\|, \quad n,m \ge n_0. \tag{1.74}$$

これは $\{A_n\Psi\}_n$ が K のコーシー列であることを意味する．K は完備であるから，ベクトル $\Phi \in \mathsf{K}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} A_n\Psi = \Phi$．対応 $\Psi \to \Phi$ は H から K へのひとつの写像をあたえる．この写像を A と書こう：$A\Psi = \Phi$．A_n の線形性を用いると，A は線形であることがわかる．(1.74) で，$m \to \infty$ とすれば

$$\|A_n\Psi - A\Psi\| \le \varepsilon\|\Psi\|, \quad n \ge n_0. \tag{1.75}$$

これを使うと，

$$\begin{aligned} \|A\Psi\| &= \|(A\Psi - A_n\Psi) + A_n\Psi\| \\ &\le \|A\Psi - A_n\Psi\| + \|A_n\Psi\| \\ &\le (\varepsilon + C)\|\Psi\|. \end{aligned}$$

したがって，$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$．さらに (1.75) から，$\|A_n - A\| \le \varepsilon,\ n \ge n_0$．これは $A_n \to A\ (n \to \infty)$ を意味する．よって題意が示された． □

定理 1.32 に述べられた性質は，$\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ の**完備性** (completeness) とよばれる．ヒルベルト空間 H 上の有界演算子の空間を $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ と記す：

$$\mathfrak{B}(\mathsf{H}) := \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{H}). \tag{1.76}$$

この空間には積も定義される．実際，$A, B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ とすれば，演算子の積の定義によって（1.2.1 項を参照），

$$(AB)\Psi = A(B\Psi),\ \Psi \in \mathsf{H}.$$

したがって，

$$\|(AB)\Psi\| \le \|A\|\,\|B\Psi\| \le \|A\|\,\|B\|\,\|\Psi\|$$

であるから，$AB \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ であり，かつ

(B.1)　$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\|$

が成り立つことがわかる．さらに，次の性質 (B.2)～(B.5) も容易に証明される：

(B.2)　$AI_{\mathsf{H}} = I_{\mathsf{H}}A, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$.

(B.3)（結合則）$(AB)C = A(BC)$.

(B.4)（積の分配法則）

$$A(B+C) = AB + AC,$$
$$(A+B)C = AC + BC.$$

(B.5)（スカラー倍の結合則）

$$\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

ここで，A, B, C は $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ の任意の元，α は任意の複素数である．

性質 (B.2)～(B.5) は $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ が $\mathbb{C}$ 上の代数をなすことを示している*18.

性質 (B.1) から，任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ に対して，

$$\|A^n\| \leq \|A\|^n, \quad n = 1, 2, \cdots, \tag{1.77}$$

という不等式が得られることを注意しておこう．

$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ の積に関して注意すべき点のひとつとして，$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ の二つの元 A, B に対して，AB と BA は一般には異なりうるということである．そこで次の定義を設ける：$AB = BA$ のとき，A と B は**可換** (commuting) であるといい，可換でない有界演算子どうしは**非可換** (non-commuting) であるという．量子力学においては，演算子の非可換性は重要な役割を果たすことになる．

有界演算子の空間 $\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ の点列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ があたえられるとその部分和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k, \quad n \geq 1,$$

*18 集合 $\mathfrak{A}$ は次の条件をみたすとき，$\mathbb{C}$ 上の**代数** (algebra) とよばれる：(A.1) $\mathfrak{A}$ は複素ベクトル空間である; (A.2) $\mathfrak{A}$ の任意の二つの元 X, Y に対して，積 $XY \in \mathfrak{A}$ が定義され，すべての $X, Y, Z \in \mathfrak{A}$ に対して，$(XY)Z = X(YZ)$（積の結合則），$X(Y+Z) = XY + XZ$, $(Y+Z)X = YX + ZX$（積の分配則）が成り立つ; (A.3) すべての $X \in \mathfrak{A}$ に対して，$XE = EX = X$ となる元 $E \in \mathfrak{A}$（積の単位元）が存在する; (A.4) すべての $X, Y \in \mathfrak{A}$, $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\alpha(XY) = (\alpha X)Y = X(\alpha Y)$.

が定まる．このとき，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ も $\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ の点列である．これが収束列であるとき，すなわち，ある $S \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ があって $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ となるとき，**無限級数** $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ **は** S **に収束する**といい

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k = S,$$

と書く．S を無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ の**和**という．このことをより厳密に書けば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$\|\sum_{k=1}^{n} A_k - S\| < \varepsilon$ が成り立つということである．

$\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ における無限級数が収束するための十分条件は次の補題によってあたえられる．

補題 1.33 $\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ の点列 $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ が $\sum_{k=1}^{\infty} \|A_k\| < \infty$ をみたすならば，$\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ は収束する．

証明 $S_n = \sum_{k=1}^{n} A_k$ とするとき，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ がコーシー列であることを示せばよい．このとき，$\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ の完備性により，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する．$n > m$ とするとき

$$\|S_n - S_m\| = \|A_{m+1} + \cdots + A_n\| \leq \|A_{m+1}\| + \cdots + \|A_n\|.$$

仮定により，この最後の量は，$n, m \to \infty$ なる極限で 0 に収束する．$n < m$ の場合も同様．したがって，$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列である． □

補題 1.33 のひとつの応用として，あとで頻繁に使われる重要な事実を証明しておこう．

定理 1.34 ノイマン (C. Neumann) **の定理**．A を H 上の有界演算子で [すなわち $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$]，$\|A\| < 1$ をみたすものとする．このとき，$I + A$ は全単射であり，$(I + A)^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$,

$$(I + A)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n A^n \tag{1.78}$$

が成り立つ．

演算子の無限級数 (1.78) を**ノイマン級数**という．注意するまでもないかもしれないが，これは，$|z| < 1$ をみたす任意の複素数 z に対して成り立つ級数展開（幾何級数展開）

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

の演算子版である．

この定理の証明のために，簡単な補題を二つ用意する．

補題 1.35　$A_n, A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$, $A_n \to A$ $(n \to \infty)$ とする．このとき，任意の $B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ に対して

$$A_n B \ \to\ AB, \tag{1.79}$$

$$BA_n \ \to\ BA,\ (n \to \infty). \tag{1.80}$$

証明　演算子ノルムの性質 (B.1) を用いると

$$\|A_n B - AB\| = \|(A_n - A)B\| \le \|A_n - A\|\,\|B\|$$

したがって，(1.79) が得られる．(1.80) も同様にして証明される．　□

補題 1.35 の内容を言葉で言い換えれば，$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ における積の演算は演算子ノルムの位相で連続である，ということである．

補題 1.36　$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ に対して，$AB = I, BA = I$ をみたす $B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ が存在するならば，A は全単射であり，$B = A^{-1}$ である．

証明　$AB = I$ から，任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$A(B\Phi) = \Phi$．したがって，A は全射である．$BA = I$ からは，A の単射性がでる．逆演算子の定義によって，$B\Phi = A^{-1}\Phi, \Phi \in \mathsf{H}$，であるので $B = A^{-1}$ である．　□

定理 1.34 の証明

(1.77) によって $\|(-1)^n A^n\| \le \|A\|^n$ であり，仮定により $\|A\| < 1$ であるから，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|(-1)^n A^n\| \le \sum_{n=0}^{\infty}\|A\|^n = \frac{1}{1-\|A\|} < \infty.$$

したがって，補題 1.33 によって，$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A^n$ は収束する．その和を S としよう：$S=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n A^n$．いま，$S_N=\sum_{n=0}^{N}(-1)^n A^n$ とすれば，補題 1.35 によって，$(I+A)S_N \to (I+A)S, S_N(I+A) \to S(I+A)$, $(N\to\infty)$. 一方，$(I+A)S_N=S_N(I+A)=I+(-1)^N A^{N+1}$．したがって，

$$\|(I+A)S_N-I\|=\|S_N(1+A)-I\|=\|A\|^{N+1}\to 0\ (N\to\infty).$$

ゆえに $(I+A)S=I,\quad S(I+A)=I$．これと補題 1.36 によって，$I+A$ は全単射であり，$S=(I+A)^{-1}$ である． □

1.2.5 有界演算子の収束の位相

ヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への有界演算子の集合 $\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ では，$A_n \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ が $A\in\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ に収束するとは $\|A_n-A\|\to 0\ (n\to\infty)$ となることとして定義された．実は，以下に述べるように，有界演算子の収束の仕方は別様にも定義されうる．上の意味での演算子の収束は**一様収束** (uniform convergence) とか**一様位相での収束**あるいは**演算子ノルムでの収束**とよばれ，u-$\lim_{n\to\infty} A_n=A$ とか $A_n \xrightarrow{\mathrm{u}} A\ (n\to\infty)$ と記される．

すべての $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して，$\|A_n\Psi-A\Psi\|_{\mathsf{K}}\to 0\ (n\to\infty)$ となるとき，A_n は A に**強収束** (strong convergence) するといい，記号的に，s-$\lim_{n\to\infty} A_n=A$ あるいは $A_n \xrightarrow{\mathrm{s}} A\ (n\to\infty)$ と表わす．

また，すべての $\Psi\in\mathsf{H}, \Phi\in\mathsf{K}$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\langle\Phi, A_n\Psi\rangle_{\mathsf{K}}=\langle\Phi, A\Psi\rangle_{\mathsf{K}}$$

となるとき，A_n は A に**弱収束** (weak convergence) するといい，記号的に，w-$\lim_{n\to\infty} A_n=A$ あるいは $A_n \xrightarrow{\mathrm{w}} A\ (n\to\infty)$ と表わす．

容易に確かめられるように，これらの収束の "強さ" については次の関係が成り立つ：

$$\text{一様収束} \implies \text{強収束} \implies \text{弱収束}.$$

考えているヒルベルト空間が有限次元ならば，これらの収束は同等であることが示される（章末演習問題 18）．しかし，無限次元の場合は，上にあげた演算

子の収束の位相は本質的に異なる．実際，この場合，弱収束はするが強収束はしない演算子や強収束はするが一様収束はしない演算子が存在しうるのである（章末演習問題 21）．

1.2.6 バナッハ空間

ヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への有界演算子の空間 $\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ と関連して，ヒルベルト空間を特殊な場合として含む一般的な空間概念を導入しておく．

X を $\mathbb{F}$ 上のベクトル空間とする（$\mathbb{F}=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$）．各ベクトル $\Psi\in\mathsf{X}$ に対して，非負の数 $\|\Psi\|_{\mathsf{X}}\geq 0$ が定まり，次の三つの条件をみたすとき，$\|\cdot\|_{\mathsf{X}}$ を X の**ノルム**，X を**ノルム空間** (normed space) という：

(N.1) $\|\Psi\|_{\mathsf{X}}=0\Longleftrightarrow\Psi=0$.

(N.2) 任意の $\alpha\in\mathbb{F}$ と $\Psi\in\mathsf{X}$ に対して，$\|\alpha\Psi\|_{\mathsf{X}}=|\alpha|\|\Psi\|_{\mathsf{X}},\Psi\in\mathsf{X}$.

(N.3)（3角不等式）任意の $\Psi,\Phi\in\mathsf{X}$ に対して，

$$\|\Psi+\Phi\|_{\mathsf{X}}\leq\|\Psi\|_{\mathsf{X}}+\|\Phi\|_{\mathsf{X}}.$$

$\mathbb{F}=\mathbb{R}(\mathbb{C})$ のとき，X を**実（複素）ノルム空間**という．

(N.1) のひとつの条件 $\|\Psi\|_{\mathsf{X}}=0\Longrightarrow\Psi=0$ を**ノルムの正定値性**という．

容易にわかるように，内積空間は，内積から定まるノルムに関して，ノルム空間である．この意味で，ノルム空間は，内積空間の一般化とみられる．

例 1.36 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続関数からなる空間 $\mathsf{C}[a,b]$ の任意の元 f に対して，

$$\|f\|_\infty:=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

を定義すると，対応 $f\to\|f\|_\infty$ は $\mathsf{C}[a,b]$ のノルムであり，$\mathsf{C}[a,b]$ はこのノルムに関して，ノルム空間になる．

ベクトル空間 X が同一でも，そこには，いくつかの異なるノルムが定義される場合がある（たとえば，上の例の $\mathsf{C}[a,b]$ の場合，L^2 内積から定義されるノルムに関してもノルム空間になる）．そのような場合，どのノルムについて，X

をノルム空間と考えるのかをはっきりさせるために，ノルム空間 $(\mathsf{X}, \|\cdot\|_{\mathsf{X}})$ という言い方をする．ベクトル空間 X が同一でも，そこで考察するノルムが違えば，ノルム空間としての性質は一般には異なる（以下の例 1.37 を参照）．

ノルム空間 X においても，内積空間におけるのと全く同様の仕方で位相が定義される．たとえば，内積空間における収束列やコーシー列の定義において，内積空間のノルムを $\|\cdot\|_{\mathsf{X}}$ で置き換えることにより，ノルム空間における収束列やコーシー列の概念が定義される．

ノルム空間 X の任意のコーシー列が収束するとき，X は**完備**であるという．完備なノルム空間を**バナッハ** (S. Banach) **空間**という．

ヒルベルト空間はバナッハ空間の特殊な場合である．

例 1.37 ノルム空間 $(\mathsf{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ はバナッハ空間である．実際，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ を $(\mathsf{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ の任意のコーシー列とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \geq n_0$ ならば，$\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$，すなわち，

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \quad x \in [a,b],\ n, m \geq n_0. \tag{1.81}$$

これは，各 $x \in [a,b]$ に対して，複素数列 $\{f_n(x)\}_n$ がコーシー列であることを意味する．$\mathbb{C}$ の完備性により，各 x に対して，$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ となる $f(x) \in \mathbb{C}$ が存在する．そこで，(1.81) で $m \to \infty$ とすれば，

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \quad x \in [a,b],\ n \geq n_0. \tag{1.82}$$

これは，関数列 $\{f_n\}_n$ が関数 f に一様収束することを意味するから，$f \in \mathsf{C}[a,b]$ である．(1.82) は，また，$\|f_n - f\|_\infty \leq \varepsilon$, $n \geq n_0$ を意味するから，$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$．ゆえに，$(\mathsf{C}[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ は完備である．

すでに注意したように，$\mathsf{C}[a,b]$ は L^2 内積から決まるノルム $\|f\|_{\mathsf{L}^2\mathsf{C}[a,b]}$ に関してもノルム空間になるが，この場合は，完備ではない（例 1.11 を参照）．したがって，二つのノルム空間 $(\mathsf{C}[a,b], |\cdot\|_\infty)$ と $(\mathsf{C}[a,b], \|\cdot\|_{\mathsf{L}^2\mathsf{C}[a,b]})$ は本質的に異なる．

(1.70)～(1.72) および定理 1.32 によって，$\mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ はバナッハ空間である．

すでに見たように，$\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ は $\mathbb{C}$ 上の代数である．この例のように，バナッハ空間 X が $\mathbb{C}$ 上の代数であって，任意の $X, Y \in \mathsf{X}$ に対して，$\|XY\|_{\mathsf{X}} \le \|X\|_{\mathsf{X}}\|Y\|_{\mathsf{X}}$ が成り立つとき，この代数は**バナッハ代数** (Banach algebra) とよばれる．

注意　補題 1.33 は，$\{A_k\}_k$ がバナッハ空間の点列の場合にも成立する．

1.3　リースの表現定理

一般に，ヒルベルト空間 H の部分集合 D から $\mathbb{C}$ への写像 $F : \mathsf{D} \to \mathbb{C}$ は H 上の**汎関数** (functional) とよばれる．この場合，D を F の定義域という．D が部分空間で F が線形のとき，F は**線形汎関数** (linear functional) とよばれる．これは，D を定義域とする，H から $\mathbb{C}$ への線形演算子にほかならない．そこで，H から $\mathbb{C}$ への有界線形演算子の空間 $\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathbb{C})$ の元を**有界線形汎関数** (bounded linear functional) あるいは**連続線形汎関数** (continuous linear functional) とよぶ．また，$\mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathbb{C}) = \mathsf{H}^*$ と記し，H^* を H の**双対空間**（そうつい）(dual space) という．

有界線形汎関数の例は容易につくることができる．H の任意のベクトル Φ に対し，写像 $F_\Phi : \mathsf{H} \to \mathbb{C}$ を

$$F_\Phi(\Psi) = \langle \Phi, \Psi \rangle, \quad \Psi \in \mathsf{H}, \tag{1.83}$$

によって定義すれば，これは線形であり，シュヴァルツの不等式により，

$$|F_\Phi(\Psi)| \le \|\Phi\|\|\Psi\|$$

が成り立つ．したがって，$F_\Psi \in \mathsf{H}^*$ であり，$\|F_\Phi\| \le \|\Phi\|$．(1.83) で $\Psi = \Phi$ の場合を考えると，$F_\Phi(\Phi) = \|\Phi\|^2$．一方，$|F_\Phi(\Phi)| \le \|F_\Phi\|\,\|\Phi\|$ であるから，$\|\Phi\| \le \|F_\Phi\|$ を得る．よって，

$$\|F_\Phi\| = \|\Phi\|. \tag{1.84}$$

ところで，H^* の任意の元は F_Φ の形で表わされるであろうか．これに対する肯定的な解答をあたえるのが次に述べるリースの表現定理である．

定理 1.37 リース (F. Riesz) の表現定理. 任意の $F \in \mathsf{H}^*$ に対し，ただひとつのベクトル $\Phi_F \in \mathsf{H}$ が存在し，$F(\Psi) = \langle \Phi_F, \Psi \rangle$, $\Psi \in \mathsf{H}$, と表わされる．さらに，$\|F\| = \|\Phi_F\|$ が成り立つ．

この定理を証明するために，有界演算子の核に関する一般的な事実を述べておく．

補題 1.38 任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ （K はヒルベルト空間）に対して，$\ker A$ は H の閉部分空間である．

証明 $\ker A$ が部分空間であることはすでに見た．$\ker A$ の閉性を示すために，$\Psi_n \in \ker A, \Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}$ $(n \to \infty)$ とする．このとき，A の連続性により，$A\Psi_n \to A\Psi$ $(n \to \infty)$．一方，$A\Psi_n = 0$ である．したがって，$A\Psi = 0$．ゆえに $\Psi \in \ker A$． □

定理 1.37 の証明

補題 1.38 によって，$\ker F$ は H の閉部分空間である．もし，$\ker F = \mathsf{H}$ ならば，$F(\Psi) = 0 = \langle 0, \Psi \rangle$ であるから，$\Phi_F = 0$ ととることにより定理の主張は証明される．そこで $\ker F \neq \mathsf{H}$ の場合を考えよう．この場合，$(\ker F)^\perp \neq \{0\}$（命題 1.19(i)）．したがって，0 でないベクトル $\Psi_0 \in (\ker F)^\perp$ が存在する．ベクトル $\Phi_F := F(\Psi_0)^* \|\Psi_0\|^{-2} \Psi_0$ が求めるものであることを示そう．まず，$\Psi \in \ker F$ ならば，$F(\Psi) = 0 = \langle \Phi_F, \Psi \rangle$．次に，$\Psi = \alpha \Psi_0, \alpha \in \mathbb{C}$ ならば

$$
\begin{aligned}
F(\Psi) &= F(\alpha\Psi_0) = \alpha F(\Psi_0) = \alpha F(\Psi_0) \frac{\langle \Psi_0, \Psi_0 \rangle}{\|\Psi_0\|^2} \\
&= \langle F(\Psi_0)^* \|\Psi_0\|^{-2} \Psi_0, \alpha \Psi_0 \rangle = \langle \Phi_F, \Psi \rangle.
\end{aligned}
$$

任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ は

$$
\Psi = \Psi_1 + \Psi_2, \quad \Psi_1 = \Psi - \frac{F(\Psi)}{F(\Psi_0)} \Psi_0,\ \Psi_2 = \frac{F(\Psi)}{F(\Psi_0)} \Psi_0,
$$

と表わされる．$\Psi_1 \in \ker F$ であり，Ψ_2 は Ψ_0 の定数倍であるから，すでに示したことにより，$F(\Psi_j) = \langle \Phi_F, \Psi_j \rangle, \quad j = 1, 2$．そこで，$F$ と $\langle \Phi_F, \cdot \rangle$ の線形性を使えば，$F(\Psi) = \langle \Phi_F, \Psi \rangle$．ベクトル Φ_F の一意性は，命題 1.19(ii) を用いて容易に示される．F のノルムに関する事実は，(1.84) による． □

注意　H 上の線形でない汎関数は**非線形汎関数** (non-linear functional) とよばれる．これについては，一般的な表現定理は存在しないが，個別的には重要なクラスがある．たとえば，量子力学においては，A を H 上の線形演算子とするとき，$F(\Psi) = \langle\Psi, A\Psi\rangle$, $\Psi \in \mathsf{D}(A)$, によって定義される非線形汎関数は基本的に重要である．

1.4　ユニタリ演算子とヒルベルト空間の同型

1.4.1　ユニタリ演算子

有界線形演算子の特別なクラスをもうひとつ導入しておく．H, K をヒルベルト空間とする．H から K への線形演算子 U が次の条件 (U.1), (U.2), (U.3) をみたすとき，U を**ユニタリ演算子** (unitary operator) あるいは**ユニタリ変換**という:

(U.1)　$\mathsf{D}(U) = \mathsf{H}$ (U の定義域は H 全体).

(U.2)　$\mathsf{R}(U) = \mathsf{K}$ (U は全射)

(U.3)　U は内積を保存する，すなわち，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して $\langle U\Psi, U\Phi\rangle_{\mathsf{K}} = \langle\Psi, \Phi\rangle_{\mathsf{H}}$.

ユニタリ変換は自動的に単射になっている．なぜなら，(U.3) によって，

(U.4)　$\|U\Psi\|_{\mathsf{K}} = \|\Psi\|_{\mathsf{H}}$, $\Psi \in \mathsf{H}$,

となるので，$U\Psi = 0$ ならば $\Psi = 0$ がでるからである．性質 (U.4) をユニタリ変換 U の**等長性**という．(U.4) から，U は有界であり，$\|U\| = 1$ であることがわかる．

線形演算子 T がユニタリ演算子であることを単に「T はユニタリである」ともいう．

例 1.38　M_F を例 1.26, 例 1.33 で論じたかけ算演算子とする．もし，$|F(x)| = 1$, μ-a.e.x, ならば，M_F はユニタリである．実際，例 1.29 の結果によって，いまの場合，M_F は全単射である．M_F の内積保存性も容易にわかる．

一般に，(U.4) をみたす有界演算子 $U : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ を**等長演算子** (isometry) または**等距離演算子**という．ユニタリ演算子は等長演算子であるが，逆は一般には成立しない（章末演習問題 21(i) を参照).

ユニタリ変換の存在に関する次の事実は基本的である．

定理 1.39 H, K を可分なヒルベルト空間，$\{\Psi_n\}_{n=1}^N$, $\{\Phi_n\}_{n=1}^N$ を，それぞれ，H, K の CONS とする．ただし，N は有限または可算無限とする．このとき，すべての n に対して，$U\Psi_n = \Phi_n$ をみたすユニタリ変換 $U : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ がただひとつ存在する．

証明 $N < \infty$ の場合は，容易であるから，$N = \infty$ の場合について証明する．任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ は，$\Psi = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \Psi_n$ と展開できる（$\alpha_n = \langle \Psi_n, \Psi \rangle$）．$\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^2 < \infty$ であるから，$\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \Phi_n$ は K において収束する（補題 1.16）．したがって，写像 $U : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ を $U\Psi = \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \Phi_n$ によって定義することができる．これが線形であり，内積を保存することは容易に確かめられる．U の全射性を示すために，$\Phi \in \mathsf{K}$ を任意にとる．$\Phi = \sum_{n=1}^\infty \beta_n \Phi_n$ ($\beta_n = \langle \Phi_n, \Phi \rangle$) と展開できる．このとき，$\sum_{n=1}^\infty \beta_n \Psi_n$ は H において収束するので，これを Ψ とおけば，$U\Psi = \Phi$ が成立する．よって，U はユニタリである．この U が $U\Psi_n = \Phi_n$ をみたすことは明らかである．

一意性の証明：別にユニタリ変換 $U' : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ で $U'\Psi_n = \Phi_n, n \in \mathbb{N}$, をみたすものがあったとする．ユニタリ変換の有界性と線形性により，すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$U'\Psi = \sum_{n=1}^\infty \langle \Psi_n, \Psi \rangle U'\Psi_n = \sum_{n=1}^\infty \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Phi_n = \sum_{n=1}^\infty \langle \Psi_n, \Psi \rangle U\Psi_n = U\Psi.$$

ゆえに $U = U'$. □

ユニタリ変換の基本的性質を見ておこう．一般に，演算子 A と $\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(A)$ に対して，D のベクトルの，A による像の全体を

$$A\mathsf{D} := \{A\Psi | \Psi \in \mathsf{D}\} \tag{1.85}$$

とおく．

定理 1.40 H, K をヒルベルト空間，$U : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ をユニタリ変換とする．このとき，次の (i)〜(iii) が成立する．

(i) U の逆演算子 U^{-1} は K から H へのユニタリ変換である．

(ii) D が H における稠密な部分空間ならば，$U\mathsf{D}$ は K の稠密な部分空間である．

(iii) H の任意の CONS $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\{U\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は K の CONS である．

証明　(i) U の内積保存性により，任意の $\eta, \chi \in \mathsf{K}$ に対して，

$$\langle U^{-1}\eta, U^{-1}\chi\rangle_{\mathsf{H}} = \langle U(U^{-1}\eta), U(U^{-1}\chi)\rangle_{\mathsf{K}} = \langle \eta, \chi\rangle_{\mathsf{K}}.$$

したがって，U^{-1} は内積を保存する．U^{-1} が全射であることは明らか．ゆえに，U^{-1} はユニタリ変換である．

(ii) $\Phi \in (U\mathsf{D})^{\perp}$ としよう．したがって，任意の $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して，$\langle \Phi, U\Psi\rangle = 0$ が成り立つ．U は全単射であるから，$\Phi = U\eta$ となる $\eta \in \mathsf{H}$ がただひとつ存在する．したがって，$0 = \langle U\eta, U\Psi\rangle = \langle \eta, \Psi\rangle$．$\mathsf{D}$ は稠密であるから，命題 1.19 によって，$\eta = 0$．したがって，$\Phi = 0$．ゆえに，$(U\mathsf{D})^{\perp} = \{0\}$．この結果と命題 1.19 によって，$U\mathsf{D}$ は K で稠密である．

(iii) $\{U\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が K の正規直交系であることは容易にわかる．$\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の完全性により，$\mathcal{L}(\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty})$ は H で稠密である（命題 1.20）．したがって，(ii) により，$\mathcal{L}(\{U\Psi_n\}_{n=1}^{\infty})$ は K で稠密である．ゆえに，命題 1.20 により，$\{U\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は完全である．　□

1.4.2　ヒルベルト空間の同型

ユニタリ変換は，その定義からわかるように，ヒルベルト空間の抽象的構造（線形構造と計量構造）を変えない．この意味でユニタリ変換によって結ばれるヒルベルト空間どうしは本質的に同じものとみなすことができる．そこで，H から K へのユニタリ変換が存在するとき，H と K は**同型** (isomorphic) であるという．

次の定理はヒルベルト空間の同型に関する基本的事実である．

定理 1.41　H を可分なヒルベルト空間，$\{\Psi_n\}_{n=1}^{N}$ を H の CONS とする (N は有限または可算無限)．このとき，次の (i),(ii) が成立する．

(i) $N<\infty$ ならば，対応

$$\Psi \to (\langle \Psi_1, \Psi \rangle, \cdots, \langle \Psi_N, \Psi \rangle) \in \mathbb{C}^N, \ \Psi \in \mathsf{H},$$

によって，H と $\mathbb{C}^N$ は同型である．

(ii) $N=\infty$ ならば，対応 $\Psi \to \{\langle \Psi_n, \Psi \rangle\}_{n=1}^{\infty} \in l^2$ $(\Psi \in \mathsf{H})$ によって，H と l^2 は同型である．

証明 (i) 例 1.7 に登場したベクトル v_j（$n=N$ の場合）の組 $\{v_n\}_{n=1}^N$ は $\mathbb{C}^N$ の正規直交基底である．定理 1.39 によって，$U\Psi_n = v_n$ となるユニタリ変換 $U : \mathsf{H} \to \mathbb{C}^N$ が存在する．任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ は $\Psi = \sum_{n=1}^N \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n$ と表わされるので

$$U\Psi = \sum_{n=1}^{N} \langle \Psi_n, \Psi \rangle v_n = (\langle \Psi_1, \Psi \rangle, \cdots, \langle \Psi_N, \Psi \rangle)$$

となる．したがって，題意が成立する．

(ii) (1.7) で定義されるベクトル e_n の集合 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ が l^2 の CONS であること（例 1.19）に注意し，(i) と同様に論を進めればよい． □

注意 上の定理の (ii) は，可分な無限次元ヒルベルト空間は本質的にはただひとつしかないことを意味する．したがって，次のような疑問が生じるかもしれない：なぜ，l^2 以外のヒルベルト空間も考察しなければならないのか？ この問いに対しては次のように答えることができる．第一に，l^2 というのは，幾何学的には，可分な無限次元ヒルベルト空間 H の中に，ひとつの完全正規直交系から定まる“直交座標系”を設定してヒルベルト空間を眺めたものとみることができるということである (つまり，H のベクトルをひとつの完全正規直交系に関して，成分表示をするということ；これがまさに上の同型対応の意味である)．したがって，l^2 は，(可分な無限次元の）抽象ヒルベルト空間の特定の表現であって，これのみに考察を限定するならば，“座標系から自由な”幾何学を展開することはできない．通常の幾何学と同様に，“座標系から自由な”考察によってはじめてヒルベルト空間の普遍的本質を明らかにすることが可能になるのである．第二に，ヒルベルト空間においては，空間の構造だけでなく，この空間に付随する他の構造（たとえば，この空間上で働く諸々の演算子たち）も重要であり，興味がある．こうした構造も座標系から自由な形で議論しておくことにより，ヒルベルト空間に関わる数学的構造を統一的に認識することが可能になる．しかも，そうした方法は応用のうえでも強い力となるのである．

定理 1.41 の同型とは別の種類の同型を有界閉区間上の L^2 空間に関して見ておこう．

例 1.39　$a < b,\ c < d,\ a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とし，写像 $\tau : [c, d] \to [a, b]$ を

$$\tau(x) = \frac{b-a}{d-c}x + \frac{ad-bc}{d-c}, \quad x \in [c, d],$$

によって定義すれば，τ は 1 対 1，上への写像である．任意の $f \in \mathsf{L}^2([a, b])$ に対して，$[c, d]$ 上の関数 $x \to f(\tau(x))$（の同値類）は $\mathsf{L}^2([c, d])$ に属し，変数変換により，$\int_c^d |f(\tau(x))|^2 dx = \left(\frac{d-c}{b-a}\right) \|f\|^2_{\mathsf{L}^2([a,b])}$ となることがわかる．そこで，写像 $U : \mathsf{L}^2([a, b]) \to \mathsf{L}^2([c, d])$ を

$$(Uf)(x) = \sqrt{\frac{b-a}{d-c}} f(\tau(x)), \quad x \in [c, d],$$

によって定義すれば，これはユニタリになる．したがって，$\mathsf{L}^2([a, b])$ と $\mathsf{L}^2([c, d])$ は同型である．この同型対応 U を $\mathsf{L}^2([a, b])$ と $\mathsf{L}^2([c, d])$ の自然な同型対応という．この事実によって，固定された有界閉区間上の L^2 空間に関しては，たとえば，$\mathsf{L}^2([0, 1])$ あるいは $\mathsf{L}^2([0, 2\pi])$ を考えれば十分であることがわかる．

1.4.3　ヒルベルト空間の直和分解

ヒルベルト空間の直和の概念を 1.1.8 項で導入した．これと同型の概念を組み合わせることにより，ヒルベルト空間の直交分解の概念が定義される．

H をヒルベルト空間とし，$\mathsf{H}_1, \cdots, \mathsf{H}_N$（$N$ は有限または可算無限）を H の閉部分空間とし，互いに直交するものとする．任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，H_n のベクトル Ψ_n がただひとつ定まり，$\Psi = \sum_{n=1}^N \Psi_n$ と表わされるとしよう（この表示は一意的である）．したがって，次のような写像 $U : \mathsf{H} \to \bigoplus_{n=1}^n \mathsf{H}_n$ が定義される：

$$U\Psi = (\Psi_n)_{n=1}^N.$$

この写像がユニタリであることは容易に確かめられる．したがって，H と $\bigoplus_{n=1}^N \mathsf{H}_n$ は同型である．この意味で

$$\mathsf{H} = \bigoplus_{n=1}^N \mathsf{H}_n$$

と書き，H は $\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2, \cdots,$ によって**直和分解**されるという．この同型対応では，$U\Psi_n = (0, \cdots, 0, \Psi_n, 0, \cdots)$ と Ψ_n が同一視される．

例 1.40 H をヒルベルト空間，M を H の閉部分空間とすれば，正射影定理により，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\Psi = \Psi_{\mathsf{M}} + \Psi_{\mathsf{M}^\perp}$．ただし，$\Psi_{\mathsf{M}} \in \mathsf{M}, \Psi_{\mathsf{M}^\perp} \in \mathsf{M}^\perp$ は，それぞれ，Ψ の $\mathsf{M}, \mathsf{M}^\perp$ への正射影である．したがって，

$$\mathsf{H} = \mathsf{M} \bigoplus \mathsf{M}^\perp.$$

例 1.41 H を可分なヒルベルト空間，$\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ を H の CONS とする．Ψ_n によって生成される 1 次元部分空間を H_n とすれば，$\mathsf{H} = \bigoplus_{n=1}^\infty \mathsf{H}_n$ である．

1.4.4 内積空間の完備化

完備でない内積空間も，ある種の手続きによって，ヒルベルト空間にすることができることを示そう．その方法は，ちょうど，実数論において，有理数のコーシー列の同値類の全体として実数を構成するのに類似したものである．

H を $\mathbb{F}$ 上の内積空間とし（$\mathbb{F} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{F} = \mathbb{C}$），H_c を H におけるコーシー列の全体としよう．二つのコーシー列 $\{\Psi_n\}_n, \{\Phi_n\}_n \in \mathsf{H}_c$ に対して，関係 $\sim$ を

$$\{\Psi_n\}_n \sim \{\Phi_n\}_n \Longleftrightarrow \|\Psi_n - \Phi_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$$

によって定義する．これが同値関係であることは容易にわかる．この同値関係による同値類の集合 $\mathsf{H}_c/\sim$ を $\widetilde{\mathsf{H}}$ とし，$\{\Psi_n\}_n$ の属する同値類を $[\{\Psi_n\}]$ で表わす．二つの元 $[\{\Psi_n\}], [\{\Phi_n\}]$ の和とスカラー倍を

$$[\{\Psi_n\}] + [\{\Phi_n\}] = [\{\Psi_n + \Phi_n\}], \quad \alpha[\{\Psi_n\}] = [\{\alpha\Psi_n\}], \quad \alpha \in \mathbb{F},$$

によって定義すれば，$\widetilde{\mathsf{H}}$ はベクトル空間になる．この場合，零ベクトルは 0 に収束する列の同値類である．任意の二つのコーシー列 $\{\Psi_n\}_n, \{\Phi_n\}_n$ に対し，$\{\langle\Psi_n, \Phi_n\rangle\}_n$ は $\mathbb{F}$ におけるコーシー列をなす．実際，

$$C = \max\{\sup_{n\geq1} \|\Psi_n\|, \sup_{n\geq1} \|\Phi_n\|\}$$

とすれば，命題 1.9 によって，これは有限であり，

$$\begin{aligned} |\langle\Psi_n,\Phi_n\rangle-\langle\Psi_m,\Phi_m\rangle| &= |\langle\Psi_n-\Psi_m,\Phi_n\rangle+\langle\Psi_m,\Phi_n-\Phi_m\rangle| \\ &\le \|\Psi_n-\Psi_m\|\,\|\Phi_n\|+\|\Psi_m\|\,\|\Phi_n-\Phi_m\| \\ &\le C(\|\Psi_n-\Psi_m\|+\|\Phi_n-\Phi_m\|) \\ &\to 0\ (m,n\to\infty). \end{aligned}$$

そこで，$\widetilde{\mathsf{H}}$ の二つの元 $[\{\Psi_n\}],[\{\Phi_n\}]$ に対し，$\langle[\{\Psi_n\}],[\{\Phi_n\}]\rangle_{\widetilde{\mathsf{H}}}\in\mathbb{F}$ を

$$\langle[\{\Psi_n\}],[\{\Phi_n\}]\rangle_{\widetilde{\mathsf{H}}}=\lim_{n\to\infty}\langle\Psi_n,\Phi_n\rangle$$

によって定義する．いまと同様にして，右辺の極限は同値類の代表元の選び方によらないことがわかる．さらに，$\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle_{\widetilde{\mathsf{H}}}$ は内積の性質をすべてみたすことも容易に確かめられる．したがって，$\widetilde{\mathsf{H}}$ は内積空間である．

ところで，もともとの空間 H は $\widetilde{\mathsf{H}}$ の部分空間とみなすことができる．実際，写像 $U:\mathsf{H}\to\widetilde{\mathsf{H}}$ を $U\Psi=[\{\Psi_n\}],\quad(\Psi_n=\Psi,\ n\ge1)$, によって定義すれば，これは線形であって，かつ内積を保存する: $\langle U\Psi,U\Phi\rangle_{\widetilde{\mathsf{H}}}=\langle\Psi,\Phi\rangle_{\mathsf{H}},\quad\Psi,\Phi\in\mathsf{H}$. 写像 U の値域 $\mathsf{R}(U)$ が $\widetilde{\mathsf{H}}$ で稠密であることを示そう．$\widetilde{\mathsf{H}}$ の任意の点 $X=[\{\Psi_n\}]$ に対し，$X_n:=U\Psi_n$ は $\mathsf{R}(U)$ の点であり，$\|X-X_n\|_{\widetilde{\mathsf{H}}}=\lim_{m\to\infty}\|\Psi_m-\Psi_n\|_{\mathsf{H}}$. ところが，$\{\Psi_n\}_n$ はコーシー列であったから，右辺は $n\to\infty$ のとき 0 に収束する．したがって，$X_n\to X\ (n\to\infty)$. ゆえに，$\mathsf{R}(U)$ は $\widetilde{\mathsf{H}}$ で稠密である．

次に $\widetilde{\mathsf{H}}$ が完備であることを示そう．$\{X_n\}_n\in\widetilde{\mathsf{H}}$ をコーシー列とすれば，$\lim_{n,m\to\infty}\|X_n-X_m\|_{\widetilde{\mathsf{H}}}=0$. 上に証明したように，$\mathsf{R}(U)$ が $\widetilde{\mathsf{H}}$ で稠密であるから，各 X_n に対して，$\|X_n-U\Psi_n\|_{\widetilde{\mathsf{H}}}\le1/n$ となるような $\Psi_n\in\mathsf{H}$ が存在する．3 角不等式によって

$$\begin{aligned} \|\Psi_n-\Psi_m\|_{\mathsf{H}} &= \|U\Psi_n-U\Psi_m\|_{\widetilde{\mathsf{H}}} \\ &\le \|U\Psi_n-X_n\|_{\widetilde{\mathsf{H}}}+\|X_n-X_m\|_{\widetilde{\mathsf{H}}}+\|X_m-U\Psi_m\|_{\widetilde{\mathsf{H}}} \\ &\le \frac{1}{n}+\|X_n-X_m\|_{\widetilde{\mathsf{H}}}+\frac{1}{m}. \end{aligned}$$

したがって，$\lim_{n,m\to\infty}\|\Psi_n-\Psi_m\|_{\mathsf{H}}=0$，すなわち，$\{\Psi_n\}\in\mathsf{H}_c$. ゆえに $X:=[\{\Psi_n\}]\in\widetilde{\mathsf{H}}$. 前段の結果から，$\|U\Psi_n-X\|_{\widetilde{\mathsf{H}}}\to0\ (n\to\infty)$. 再び，3

角不等式により，

$$\begin{aligned}\|X_n - X\|_{\widetilde{\mathsf{H}}} &\le \|X_n - U\Psi_n\|_{\widetilde{\mathsf{H}}} + \|U\Psi_n - X\|_{\widetilde{\mathsf{H}}} \\ &\le \frac{1}{n} + \|U\Psi_n - X\|_{\widetilde{\mathsf{H}}}.\end{aligned}$$

したがって，X_n は X に収束する．ゆえに，$\widetilde{\mathsf{H}}$ は完備，すなわち，ヒルベルト空間である．このヒルベルト空間を内積空間 H の**完備化** (completion) とよぶ．$\mathsf{R}(U)$ と H を同一視すれば，どんな内積空間に対しても，それを稠密な部分空間として含むヒルベルト空間が存在することが示されたことになる．もちろん，H がすでに完備であれば，$\mathsf{R}(U) = \widetilde{\mathsf{H}}$ であるので，その完備化は H と同じものとみなせる．

例 1.42 例 1.3 の内積空間 $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[a,b]$ の完備化 $\widetilde{\mathsf{L}^2\mathsf{C}}[a,b]$ は自然な仕方で $\mathsf{L}^2([a,b])$ と同一視できることを示そう．まず，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathsf{L}^2\mathsf{C}[a,b]$ のコーシー列とすれば，これは，$\mathsf{L}^2([a,b])$ のコーシー列とみることができるから，$\mathsf{L}^2([a,b])$ の完備性により，$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^2([a,b])} \to 0\ (n \to \infty) \cdots (*)$ となる $f \in \mathsf{L}^2([a,b])$ が存在する．そこで，写像 $W : \widetilde{\mathsf{L}^2\mathsf{C}}[a,b] \to \mathsf{L}^2([a,b])$ を $W[\{f_n\}_n] = f$ によって定義する．これは等長な線形演算子である．さらに，$\mathsf{C}[a,b]$ が $\mathsf{L}^2([a,b])$ で稠密であることにより（例 1.20 を参照），任意の $f \in \mathsf{L}^2([a,b])$ に対して，$(*)$ をみたす関数列 $\{f_n\}_n \subset \mathsf{C}[a,b]$ が存在する．したがって，W は全射である．ゆえに，W はユニタリである．こうして，自然な仕方で $\widetilde{\mathsf{L}^2\mathsf{C}}[a,b] = \mathsf{L}^2([a,b])$ という同一視ができる．

第1章　演習問題

1. H を内積空間とする．

(i)　すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\|\Psi+\Phi\|^2 + \|\Psi-\Phi\|^2 = 2(\|\Psi\|^2 + \|\Phi\|^2)$$

が成立することを証明せよ．これを**中線定理**または**平行四辺形の法則**とよぶ．

(ii)　すべての $\Psi, \Phi, \Xi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\|\Xi-\Psi\|^2 + \|\Xi-\Phi\|^2 = \frac{1}{2}\|\Psi-\Phi\|^2 + 2\left\|\Xi - \frac{\Psi+\Phi}{2}\right\|^2$$

が成立することを証明せよ．これを**アポロニウス** (Apollonius) **の恒等式**とよぶ．

(iii)　H が実内積空間のとき，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \frac{1}{4}(\|\Psi+\Phi\|^2 - \|\Psi-\Phi\|^2)$$

が成立することを証明せよ．

(iv)　H が複素内積空間のとき，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, \Phi \rangle = \frac{1}{4}\{(\|\Psi+\Phi\|^2 - \|\Psi-\Phi\|^2) - i(\|\Psi+i\Phi\|^2 - \|\Psi-i\Phi\|^2)\}$$

が成立することを証明せよ．

注意． (iii), (iv) の恒等式を**偏極恒等式** (polarization identity) という．これらの恒等式は，内積がノルムから復元されることを示す．

2. $(\mathsf{X}, \|\cdot\|)$ を複素ノルム空間とし，ノルムは平行四辺形の法則

$$\|\Psi+\Phi\|^2 + \|\Psi-\Phi\|^2 = 2(\|\Psi\|^2 + \|\Phi\|^2), \quad \Psi, \Phi \in \mathsf{X},$$

をみたすとする（問題 1(i) を参照）．このとき，$\mathsf{X} \times \mathsf{X}$ から $\mathbb{C}$ への写像 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を

$$\langle \Psi, \Phi \rangle := \frac{1}{4}\{(\|\Psi+\Phi\|^2 - \|\Psi-\Phi\|^2) - i(\|\Psi+i\Phi\|^2 - \|\Psi-i\Phi\|^2)\}, \ \Psi, \Phi \in \mathsf{X},$$

によって定義すれば，これは X の内積であることを証明せよ．

3. 半正定値内積空間 H において，すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$\|\alpha\Psi + \Phi\|^2 \geq 0$ なる事実を利用して，シュヴァルツの不等式を導け．

4. H をヒルベルト空間とし，$\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ を固定し，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = \|x\Psi + \Phi\|$, $x \in \mathbb{R}$ を考える．

(i) f は連続であることを証明せよ．

(ii) f は凸関数であることを証明せよ[*1]．

(iii) $\Psi \neq 0$ ならば，$f(x_0) = \inf_{x\in\mathbb{R}} f(x)$ をみたす x_0 はただひとつ存在することを示し，x_0 と $f(x_0)$ を求めよ．また，$\mathrm{Re}\,\langle\Psi, x_0\Psi + \Phi\rangle = 0$ を証明せよ．

5. $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を内積空間 H の任意の正規直交系とする．

(i) 任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\mathbb{C}^N$ 上の関数

$$f(z_1, \cdots, z_N) := \|\Psi - \sum_{n=1}^{N} z_n\Psi_n\|$$

$(z_n \in \mathbb{C}, n = 1, \cdots, N)$ は $z_n = \langle\Psi_n, \Psi\rangle, n = 1, \cdots, N,$ のとき最小になることを証明せよ．

(ii) $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束する部分列を含まないことを証明せよ．

ヒント：系 1.5 を用いよ．

6. 内積空間 H が無限次元のとき，中心が 0，半径が r の開球 $\mathsf{B}_r = \{\Psi \in \mathsf{H} | \|\Psi\| < r\}$ に対して，次の性質を満足する定数 $\delta > 0$ とベクトル $\Psi_n \in \mathsf{H}, n = 1, 2, \cdots,$ が存在することを証明せよ：

(i) $n \neq m$ ならば，$\mathsf{B}_\delta(\Psi_n) \cap \mathsf{B}_\delta(\Psi_m) = \emptyset$.

(ii) $\mathsf{B}_\delta(\Psi_n) \subset \mathsf{B}_r$, $n = 1, 2, \cdots$.

ヒント：$\dim \mathsf{H} = \infty$ により，可算無限個のベクトルからなる正規直交系 $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在する．$\Psi_n = r\Phi_n/2$ とすれば，$\|\Psi_n\| = r/2$ であり，$\|\Psi_n - \Psi_m\| = r/\sqrt{2}, n \neq m$. δ として，たとえば，$\delta = r/2\sqrt{2}$ をとれ．

注意. $\mathsf{B}_\delta(\Psi_n)$ は B_δ を Ψ_n だけ平行移動（並進）したものとみることができる．したがって，この問題の結果は，無限次元の内積空間上には，並進不変な測度 μ で非自明なもの（i.e., 任意の開球 $B_r(\Psi)$ に対して，$0 < \mu(\mathsf{B}_r) = \mu(\mathsf{B}_r(\Psi)) < \infty$ をみたすもの）は存在しないことを意味する．これは，量子力学との関連では，Feynman の経路積分あるいは汎関数積分の存在を確立する問題の困難を示唆している．

[*1] 区間 $\mathsf{I} \subset \mathbb{R}$ 上の実数値関数 g が凸関数であるとは，I の任意の二点 x, y に対して，

$$g\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\{g(x) + g(y)\}$$

が成立するときをいう．

7. 非負の整数 $l = 0, 1, 2, \cdots$, に対して，

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l, \quad x \in \mathbb{R},$$

とおく．

(i) P_l は l 次の多項式であり，微分方程式—ルジャンドル (**Legendre**) **の微分方程式**—

$$(1-x^2)y'' - 2xy + l(l+1)y = 0$$

を満足することを証明せよ．P_l を**ルジャンドルの多項式**という．

(ii) $\{P_l\}_{l=0}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2([-1,1])$ の直交系であり，

$$\int_{[-1,1]} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{ll'}$$

が成立することを証明せよ[*2]．

(iii) $\mathsf{L}^2([-1,1])$ の正規直交系 $\{\sqrt{2l+1}P_l/\sqrt{2}\}_l$ は，$\mathsf{L}^2([-1,1])$ において，単項式 $1, x, x^2, x^3, \cdots$, にグラム-シュミットの直交化を行なって得られる正規直交系であることを証明せよ．さらに，この正規直交系は完全であることを証明せよ．

ヒント：完全性の証明には，ヴァイエルシュトラスの多項式近似定理と $\mathsf{C}[-1,1]$ が $\mathsf{L}^2([-1,1])$ で稠密であることを用いよ．

8. $n = 0, 1, 2, \cdots$, に対して，

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

とおく．

(i) H_n は n 次の多項式であり，微分方程式—**エルミート (Hermite) の微分方程式**—

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0$$

を満足することを証明せよ．H_n を n 次の**エルミート多項式**という．

(ii) $U_n(x) = e^{-x^2/2}H_n(x)$ とおくと，これは微分方程式

$$y'' + (1 - x^2 + 2n)y = 0$$

を満足することを証明せよ．関数 U_n を**エルミート関数**という．

---

*2 ルジャンドルの多項式についての詳しい議論は，たとえば，マージナウ・マーフィ『物理と化学のための数学 I（改訂版）』（共立全書 501，共立出版，邦訳 1959；原著改訂版 H. Margenau and G. M. Murphy: *The Mathematics of Physics and Chemistry*, D. Van Nostrand Company, Inc., 1955）の第 3 章 §3.3～§3.7 に見いだされる．

(iii) $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の直交系であり，

$$\int_{\mathbb{R}} U_n(x)U_m(x)dx = 2^n n!\delta_{nm}$$

が成立することを証明せよ[*3].

(iv) (iii) によって，$\{H_n/\sqrt{2^n n!}\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$（測度 $e^{-x^2}dx$ に関する，$\mathbb{R}$ 上の L^2 空間）の正規直交系である．これは，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$ において，単項式 $1, x, x^2, \cdots$, にグラム-シュミットの直交化を行なって得られる正規直交系であることを証明せよ．さらに，この正規直交系は完全であることを証明せよ．

ヒント：完全性を証明するひとつの方法は次の通り：まず，任意の $f \in \mathsf{C}_0(\mathbb{R})$ に対して，$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e^{-x^2/2}dx)} \to 0\ (n \to \infty)$ となる $f_n \in \mathcal{L}(\{H_n\}_{n=0}^{\infty})$ の存在を示す（これはヴァイエルシュトラスの多項式近似定理を用いてなされる）．次に，$\mathsf{C}_0(\mathbb{R})$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}, e^{-x^2/2}dx)$ においても稠密であることを応用する．

9. $n = 0, 1, 2, \cdots$, に対して，

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R},$$

とおく．

(i) L_n は n 次の多項式であり，微分方程式—**ラゲール (Laguerre) の微分方程式**—

$$xy' + (1 - x)y' + ny = 0$$

を満足することを証明せよ．L_n を**ラゲールの多項式**という．

(ii) $\{L_n\}_{n=0}^{\infty}$ は $\mathsf{L}^2((0, \infty), e^{-x}dx)$ の直交系であり，

$$\int_{(0,\infty)} L_n(x)L_m(x)e^{-x}dx = (n!)^2\delta_{mn}$$

が成立することを証明せよ．

(iii) 正規直交系 $\{L_n/n!\}_{n=0}^{\infty}$ は，$\mathsf{L}^2((0, \infty), e^{-x}dx)$ において，単項式 $1, x, x^2, \cdots$, にグラム-シュミットの直交化を行なって得られる正規直交系であることを証明せよ．この正規直交系は完全であることを証明せよ．

ヒント：完全性の証明は，前問と同様．

10. 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の単位円板 $D := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid |z|^2 = x^2 + y^2 \leq 1\}$ 上の連続関数の空間を $\mathsf{C}(D)$ とする．

[*3] エルミート多項式についても前掲書の第2章 §2.15，第3章 §3.10 に詳しく論じられている．

(i)　$f, g \in \mathsf{C}(D)$ に対して,

$$\langle f, g \rangle = \int_D f(z)^* g(z) dxdy$$

とすれば，これは $\mathsf{C}(D)$ の内積であることを証明せよ．

(ii)

$$\phi_n(z) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} z^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

とすれば，$\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，(i) の内積に関して，$\mathsf{C}(D)$ の正規直交系であることを証明せよ．

11. 複素平面 $\mathbb{C}$ 上の単位円 $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = 1\}$ 上の連続関数の空間を $\mathsf{C}(\mathbb{T})$ とする．

(i)　$f, g \in \mathsf{C}(\mathbb{T})$ に対して,

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{T}} f(z)^* g(z) \frac{dz}{iz}$$

とすれば，これは $\mathsf{C}(\mathbb{T})$ の内積であることを証明せよ．

(ii)

$$\psi_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots,$$

とすれば，$\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，(i) の内積に関して，$\mathsf{C}(\mathbb{T})$ の正規直交系であることを証明せよ．

12. 関数列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \ \cdots, \ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \cdots,$$

は $\mathsf{L}^2([0, 2\pi])$ の CONS であることを証明せよ．

ヒント：$\{e^{inx}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ が $\mathsf{L}^2([0, 2\pi])$ の CONS であることは既知としてよい．

13. 関数列

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x, \ \cdots, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos nx, \cdots,$$

は $\mathsf{L}^2([0, \pi])$ の CONS であることを証明せよ．

14. 関数列

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x, \ \cdots, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin nx, \cdots,$$

は $\mathsf{L}^2([0, \pi])$ の CONS であることを証明せよ．

15. $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ において次の部分集合を考える：

$$\begin{aligned} \mathsf{L}_+^2(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) | f(x) = f(-x), \text{ a.e.} x\}, \\ \mathsf{L}_-^2(\mathbb{R}) &= \{f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) | f(x) = -f(-x), \text{ a.e.} x\} \end{aligned}$$

(i) $\mathsf{L}^2_\pm(\mathbb{R})$ は閉部分空間であることを証明せよ．

(ii) $\mathsf{L}^2_+(\mathbb{R}) \perp \mathsf{L}^2_-(\mathbb{R})$ かつ $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}) = \mathsf{L}^2_+(\mathbb{R}) \bigoplus \mathsf{L}^2_-(\mathbb{R})$ を証明せよ．

16. $[0,1]$ 上の複素数値関数 f で，可算個（有限個または可算無限個）の点を除いて 0 となり，$\sum_{x\in[0,1]} |f(x)|^2 < \infty$ をみたすものの全体を $l^2[0,1]$ とする（$\sum_{x\in[0,1]} |f(x)|^2$ の意味は $f(x)$ が 0 でない点 x—これらは可算個— についての和を表わす；$f(x)$ が 0 でない可算個の点の集合は f ごとに決まることに注意）．$f, g \in l^2[0,1]$ に対して，$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in[0,1]} f(x)^* g(x)$（和は $f(x)$ および $g(x)$ が 0 でない点にわたる）とおくと，これは $l^2[0,1]$ に内積を定め，この内積に関して，$l^2[0,1]$ はヒルベルト空間になることを証明せよ．$l^2[0,1]$ は可分でないことを証明せよ．

ヒント：完備性の証明は，l^2 のそれと同様．非可分性については，$x \in [0,1]$ に対して，$e_x \in l^2[0,1]$ を $e_x(x) = 1$, $e_x(y) = 0$ ($y \neq x$ のとき) と定義すれば，$\{e_x\}_{x\in[0,1]}$ が $l^2[0,1]$ の正規直交系をなすことを証明せよ．

17. M をヒルベルト空間 H の閉部分空間，$F : \mathsf{M} \to \mathbb{C}$ を M 上の有界線形汎関数とする．このとき，H 上の有界線形汎関数 G で $\Psi \in \mathsf{M}$ に対して，$G(\Psi) = F(\Psi)$ を満足するものの一般形を求めよ．また，そのような G で $\|G\| = \|F\|$ をみたすものはただひとつしかないことを示し，それを求めよ．

ヒント：正射影定理とリースの表現定理を用いよ．

18. ヒルベルト空間 H が有限次元ならば，H 上の有界演算子の一様収束，強収束，弱収束はすべて同等であることを証明せよ．

ヒント：定理 1.30 の証明における演算子 A の行列表示 (A_{mn}) とノルムの評価 (1.67) を用いよ．

19. ヒルベルト空間 H の任意の正規直交系（完全である必要はない）$\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ は弱収束列であるが，強収束列ではないことを証明せよ．

ヒント：問題 5(ii)．

20. $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ をヒルベルト空間 H の CONS，$\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ を任意の複素数列とする．$\mathsf{D} = \mathcal{L}(\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty)$ とおく．

(i) D を定義域とする，H 上の線形演算子 A で，$A\Psi_n = \lambda_n \Psi_n, n = 1, 2, \cdots,$ をみたすものがただひとつ存在することを証明せよ．

(ii) A が有界であるための必要十分条件は $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ が有界であることである．これを証明せよ．この場合，A のノルムを $\{\lambda_n\}_{n=1}^\infty$ を用いて表わせ．

21. ヒルベルト空間 l^2 において，次の演算子 A_n, B_n を考える：

$$\mathsf{D}(A_n) = l^2, \quad A_n a := \{\underbrace{0, \cdots, 0,}_{n\,個} a_1, a_2, \cdots\},$$

$$\mathsf{D}(B_n) = l^2, \quad B_n a := \{a_n, a_{n+1}, \cdots\}, \quad a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \in l^2.$$

(i) A_n は等長演算子であるがユニタリでないことを証明せよ．また，$\|A_n\|=1$ を証明せよ．

(ii) $\text{w-}\lim_{n\to\infty} A_n = 0$ であるが，A_n は零演算子に強収束はしないことを証明せよ．

(iii) $\text{s-}\lim_{n\to\infty} B_n = 0$ であるが，B_n は零演算子に一様収束はしないことを証明せよ．

ヒント：$\|B_n\|=1$ を証明せよ．

22. ヒルベルト空間 H において，$\sum_{n=1}^{\infty}\Psi_n=\Psi, \sum_{n=1}^{\infty}\Phi_n=\Phi$ $(\Psi_n,\Phi_n,\Psi,\Phi\in \mathsf{H})$ のとき，$\langle\Phi,\Psi\rangle=\lim_{N\to\infty}\sum_{m,n=1}^{N}\langle\Phi_m,\Psi_n\rangle$ を証明せよ．

23. ヒルベルト空間 H の任意の元 Ψ に対して，

$$\|\Psi\| = \sup_{\Phi\in\mathsf{H},\|\Phi\|=1} |\langle\Psi,\Phi\rangle|$$

が成立することを証明せよ．

注意．これは，内積を用いてノルムを近似するひとつの方法をあたえる式であり，しばしば有用である．

24. H をヒルベルト空間とする．リースの表現定理により，各 $F\in\mathsf{H}^*$ に対して，H のベクトル Φ_F がただひとつ定まり，$F(\Psi)=\langle\Phi_F,\Psi\rangle$, $\Psi\in\mathsf{H}$, $\|F\|=\|\Phi_F\|$, が成立する．したがって，対応 $L:\mathsf{H}^*\to\mathsf{H}$, $L(F):=\Phi_F$, は写像を定める．この写像について，次の性質を証明せよ．

(i) L は全単射である．

(ii) （反線形性）すべての $F,G\in\mathsf{H}^*$ と $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ に対して，

$$L(\alpha F+\beta G)=\alpha^* L(F)+\beta^* L(G)$$

が成り立つ．

(iii) $\|L(F)\|=\|F\|$, $F\in\mathsf{H}^*$.

25. 有界閉区間 $[a,b]$ 上の連続微分可能な複素数値関数の全体を $\mathsf{C}^1[a,b]$ とする．$f,g\in\mathsf{C}^1[a,b]$ に対して，

$$\langle f,g\rangle_1 := \int_a^b f'(x)^* g'(x)dx$$

とおく．ただし，f' は f の導関数を表わす．このとき，$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$ は内積ではないが，半正定値内積であることを証明せよ．

26. $f,g\in\mathsf{C}_0^1(\mathbb{R})$ に対して，

$$\langle f,g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)^* g'(x)dx$$

とすれば，これは $\mathsf{C}_0^1(\mathbb{R})$ に内積をあたえることを証明せよ．さらに，$\mathsf{C}_0^1(\mathbb{R})$ はこの内積について完備でないこと，すなわち，ヒルベルト空間にならないことを証明せよ．

27. $\{\Psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ を H における CONS とする．このとき，$S\Psi_n = \Psi_{n+1}, n \in \mathbb{Z}$, をみたす，$\mathsf{H}$ 上のユニタリ演算子 S がただひとつ存在することを証明せよ．S は**シフト演算子**とよばれる．

28. (X,μ), (Y,ν) を測度空間とする．$K : \mathsf{X}\times\mathsf{Y} \to \mathbb{C}$ は可測であるとし，$\int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} |K(x,y)|^2 d(\mu\otimes\nu)(x,y) < \infty$ であるとする．このとき，

$$(A_K f)(x) = \int_{\mathsf{Y}} K(x,y)f(y)d\nu(y), \quad f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{Y},d\nu),$$

によって定義される写像 A_K は $\mathsf{L}^2(\mathsf{Y},d\nu)$ から $\mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu)$ への有界演算子であることを証明せよ．さらに，$\|A_K\| \le \|K\|_{\mathsf{L}^2(\mathsf{X}\times\mathsf{Y},d(\mu\otimes\nu))}$ を証明せよ．

注意．この問題は，例 1.32 の一般化であり，例 1.32 の場合と同様に，A_K を**ヒルベルト-シュミット型積分演算子**といい，関数 $K(x,y)$ をその**積分核** (integral kernel) とよぶ．

29. $\text{w-}\lim_{n\to\infty}\Psi_n = \Psi \in \mathsf{H}, \lim_{n\to\infty}\|\Psi_n\| = \|\Psi\|$ ならば，$\text{s-}\lim_{n\to\infty}\Psi_n = \Psi$ を証明せよ．

30. $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n}$ は存在し，

$$\lim_{n\to\infty}\|A^n\|^{1/n} = \inf_n \|A^n\|^{1/n} \qquad (*)$$

が成立することを以下の手順にしたがって証明せよ．

(i) $a_n = \log\|A^n\|$ とおくと，$a_{m+n} \le a_m + a_n$ が成立することを証明せよ．

(ii) 自然数 m を固定し，$n = mq+r$ とする（q,r は非負整数で，$0 \le r \le m-1$）．(i) を用いて，

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{a_n}{n} \le \frac{a_m}{m}$$

を証明せよ．

(iii) $\lim_{n\to\infty} a_n/n = \inf_n a_n/n$ を示し，$(*)$ を導け．

31. **（有界演算子の指数関数）** H をヒルベルト空間，$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ とする．このとき，

$$e^A := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{n!}$$

は $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ において収束すること，および，$\|e^A\| \le e^{\|A\|}$ を証明せよ．さらに，次の (i)～(iv) を証明せよ．

(i) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$(e^A)^n = e^{nA}$.

(ii) $e^0 = I$.

(iii) e^A は全単射であり，$(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(iv) $A,\ B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ が可換ならば，$e^{A+B} = e^A e^B = e^B e^A$.

32. H, K, X をヒルベルト空間，$U_1 : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$, $U_2 : \mathsf{K} \to \mathsf{X}$ をユニタリ演算子とする．このとき，$U_2 U_1$ は H から X へのユニタリ演算子であることを証明せよ．

33. H を複素ヒルベルト空間，A, B を稠密に定義された H 上の線形演算子とし，$\mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ は稠密であるとする．すべての $\Psi \in \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ に対して，$\langle \Psi, A\Psi \rangle = \langle \Psi, B\Psi \rangle$ ならば，すべての $\Psi \in \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ に対して $A\Psi = B\Psi$ が成立することを証明せよ．

ヒント：偏極恒等式 [問題 1(iv)] を利用して，問題の仮定のもとで，すべての $\Phi, \Psi \in \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ に対して，$\langle \Phi, (A\Psi - B\Psi) \rangle = 0$ を示せ．

2
スペクトル理論

非有界演算子の場合をも含む形で，ヒルベルト空間で働く線形演算子の理論をさらに詳しく展開する．まず，稠密に定義された線形演算子には共役演算子とよばれる線形演算子が相伴うことを示す．線形演算子の重要なクラスとして，閉演算子を導入する．線形演算子と複素数を結びつける概念としてスペクトルという概念が定義される．スペクトルの一般的性質を調べる．量子力学への応用上，特に重要な線形演算子のクラスとして，対称演算子と自己共役演算子がある（後者は，前者の特殊な場合）．自己共役演算子の性質を調べる．さらに，自己共役演算子に対して成立するスペクトル定理を証明し，演算子解析を展開する．

2.1　共役演算子と閉演算子

2.1.1　共 役 演 算 子

H と K を複素ヒルベルト空間，A を H から K への稠密に定義された線形演算子とする．各 $\Psi \in \mathsf{K}$ に対して，

$$\mathsf{D}(F_\Psi) = \mathsf{D}(A), \quad F_\Psi(\Phi) = \langle \Psi, A\Phi \rangle_{\mathsf{K}}, \ \Phi \in \mathsf{D}(A), \tag{2.1}$$

によって，H から $\mathbb{C}$ への線形演算子 F_Ψ が定義される．いま，F_Ψ が有界であると仮定しよう．$\mathsf{D}(A)$ は稠密であるから，このとき，拡大定理（定理 1.31）によって，F_Ψ は H 全体から $\mathbb{C}$ への有界線形演算子，すなわち，H^* の元に一意的に拡大される．これを $\widetilde{F}_\Psi$ としよう．するとリースの表現定理によって，$\widetilde{F}_\Psi = \langle \Theta_\Psi, \Phi \rangle_{\mathsf{H}}, \ \Phi \in \mathsf{H}$, をみたすベクトル $\Theta_\Psi \in \mathsf{H}$ がただひとつ存在する．そこで，K の部分集合 D_A^* を

$$\mathsf{D}_A^* = \{\Psi \in \mathsf{K} | F_\Psi \text{が有界} \} \tag{2.2}$$

によって定義する．D_A^* は 部分空間であること，および任意の $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathsf{D}_A^*$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\Theta_{\alpha\Psi_1+\beta\Psi_2} = \alpha\Theta_{\Psi_1} + \beta\Theta_{\Psi_2}$$

が成り立つことは容易にわかる．つまり，対応 $\Psi \to \Theta_\Psi$ は，D_A^* を定義域とする，K から H への線形演算子を定める．この線形演算子を A^* と書き，A の**共役演算子** (adjoint) という．この定義から，すべての $\Phi \in \mathsf{D}(A)$ と $\Psi \in \mathsf{D}(A^*) = \mathsf{D}_A^*$ に対して，

$$\langle \Psi, A\Phi \rangle_{\mathsf{K}} = \langle A^*\Psi, \Phi \rangle_{\mathsf{H}} \tag{2.3}$$

が成り立つことになる．いまの議論から，共役演算子 A^* の定義域は

$$\mathsf{D}(A^*) = \{\Psi \in \mathsf{K} | \text{ あるベクトル} \Theta_\Psi \in \mathsf{H} \text{ が存在して，すべての } \Phi \in \mathsf{D}(A) \text{ に対して } \langle \Psi, A\Phi \rangle_{\mathsf{K}} = \langle \Theta_\Psi, \Phi \rangle_{\mathsf{H}}\} \tag{2.4}$$

とも表わされることがわかる．この場合，$A^*\Psi = \Theta_\Psi$ である（$\mathsf{D}(A)$ の稠密性により，条件にいうベクトル Θ_Ψ は，Ψ に対して一意的に定まる）．共役演算子は稠密に定義された演算子に対してのみ定義されることに注意しよう．

共役をとる演算は演算子の大小関係（第 1 章 1.2.3 項を参照）を逆にする．すなわち，B を稠密に定義された，H から K への演算子として，

$$A \subset B \Longrightarrow B^* \subset A^* \tag{2.5}$$

が成り立つ．実際，$\Psi \in \mathsf{D}(B^*)$ とすれば，任意の $\Phi \in \mathsf{D}(A)$ $[\subset \mathsf{D}(B)]$ に対して，$\langle B^*\Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, B\Phi \rangle = \langle \Psi, A\Phi \rangle$．したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*)$ かつ $A^*\Psi = B^*\Psi$．

A が稠密に定義された演算子で $\mathsf{D}(A^*)$ も稠密ならば，A^* の共役演算子 $(A^*)^*$ も定義される．この場合，

$$(A^*)^* = A^{**} \tag{2.6}$$

と記す．

次の命題は，A が有界の場合に，その共役演算子 A^* の特徴づけをあたえる．

命題 2.1　$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ とする．このとき，次の (i)〜(iii) が成り立つ．

(i)　$A^* \in \mathfrak{B}(\mathsf{K}, \mathsf{H})$.

(ii)　$A^{**} = A$.

(iii)　$\|A^*\| = \|A\|$.

証明　(i) すべての $\Psi \in \mathsf{K}, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$|\langle \Psi, A\Phi \rangle| \leq \|A\| \|\Psi\| \|\Phi\|$．したがって，各 Ψ ごとに定まる写像 $F_\Psi : \Phi \to \langle \Psi, A\Phi \rangle$ は有界線形汎関数である．ゆえに，リースの表現定理により，

$$\langle \Psi, A\Phi \rangle = \langle B_\Psi, \Phi \rangle, \quad \Phi \in \mathsf{H}, \tag{2.7}$$
$$\|B_\Psi\| = \|F_\Psi\| \leq \|A\| \|\Psi\|.$$

をみたすベクトル $B_\Psi \in \mathsf{H}$ がただひとつ存在する．これから，対応 $\Psi \to B_\Psi$ によって定義される写像を B とすれば，B は有界な線形演算子であり，$\|B\| \leq \|A\|$ が成立する．(2.7) により，

$$\langle \Psi, A\Phi \rangle = \langle B\Psi, \Phi \rangle, \quad \Psi \in \mathsf{K},\ \Phi \in \mathsf{H}.$$

これは，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*)$ かつ $A^*\Psi = B\Psi$ であることを示している．ゆえに，$\mathsf{D}(A^*) = \mathsf{K}$ であり，A^* は有界である．

(ii) (i) により，任意の $\Psi \in \mathsf{H}, \Phi \in \mathsf{K}$ に対して，$\langle \Phi, A\Psi \rangle = \langle A^*\Phi, \Psi \rangle$ が成り立つ．この式を，Ψ を固定して，任意の $\Phi \in \mathsf{D}(A^*) = \mathsf{K}$ に対して成り立つ式と見ると，$\Psi \in \mathsf{D}(A^{**}) = \mathsf{H}$ かつ $A\Psi = A^{**}\Psi$ が結論される．ゆえに $A^{**} = A$.

(iii) (i) の議論より $\|A^*\| \leq \|A\|$ がわかる．A は任意でよいから，A のかわりに A^* を考えると，$\|A^{**}\| \leq \|A^*\|$ も成り立つ．そこで (ii) を使えば．求める等式を得る．　□

共役演算子について注意しなければならないことのひとつは，演算子 A が非有界の場合，A^* の定義域は稠密であるとは限らない，ということである．例をひとつあげよう．

例 2.1　ヒルベルト空間 l^2 のベクトル $a = \{a_n\}_{n=1}^\infty \neq 0$ を任意にひとつ固定する．複素数列 $b = \{b_n\}_{n=1}^\infty$ は l^2 には属さないとする（したがって，$\sum_{n=1}^\infty |b_n|^2 =$

∞)．次のように定義される l^2 上の演算子 A を考えよう：

$$\mathsf{D}(A) = \left\{ x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in l^2 \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |b_n x_n| < \infty \right\}, \quad Ax = \alpha(x)a, \ x \in \mathsf{D}(A).$$

ただし，$\alpha(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^* x_n$（$x \in \mathsf{D}(A)$ ならば右辺の級数は絶対収束している）．容易にわかるように，$l_0^2 \subset \mathsf{D}(A)$ であるから（l_0^2 については例 1.18 を参照），$\mathsf{D}(A)$ は稠密である．したがって，共役演算子 A^* が存在する．任意の $y \in \mathsf{D}(A^*)$ と $x \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\langle A^*y, x\rangle = \alpha(x)\langle y, a\rangle$ であるから，特に，$x = e_n$（(1.7) を参照）とすれば，すべての $n = 1, 2, \cdots$, に対して，$(A^*y)_n = \langle a, y\rangle b_n$ が成立する．仮定により，$b \notin l^2$ であるから，$\langle a, y\rangle = 0$ でなければならない．したがって，$A^*y = 0, y \in \{a\}^\perp$．ゆえに，$\mathsf{D}(A^*) \subset \{a\}^\perp$．逆に，$y \in \{a\}^\perp$ とすれば，すべての $x \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\langle y, Ax\rangle = \alpha(x)\langle y, a\rangle = 0$．したがって，$y \in \mathsf{D}(A^*)$, $A^*y = 0$．以上から，$\mathsf{D}(A^*) = \{a\}^\perp$．$\{a\}^\perp$ は稠密ではないから，$\mathsf{D}(A^*)$ は稠密ではない．この例の場合，$A^*y = 0$, $y \in \mathsf{D}(A^*)$, という事実にも注目すべきである．つまり，これは，共役演算子の作用が自明になる例にもなっている[*1]．

非有界演算子でその共役演算子の定義域が稠密になる例も見ておこう．

例 2.2 例 1.26 のかけ算演算子 M_F の定義域は稠密であることを例 1.31 で証明した．したがって，M_F は共役演算子 ${M_F}^*$ をもつ．これの具体的な表示を求めてみよう．$f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu), g \in \mathsf{D}(M_F)$ とすれば，

$$\langle f, M_F g\rangle = \int_{\mathsf{X}} f(x)^* F(x) g(x) d\mu(x) = \int_{\mathsf{X}} (F(x)^* f(x))^* g(x) d\mu(x).$$

したがって，$F^* f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ ならば，$f \in \mathsf{D}({M_F}^*)$ であり

$$({M_F}^* f)(x) = F(x)^* f(x) = (M_{F^*} f)(x).$$

他方，$F^* f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ と $f \in \mathsf{D}(M_{F^*})$ とは同じことであるから，$M_{F^*} \subset {M_F}^*$ を得る．

[*1] 定義域のすべてのベクトルに対して，その作用が零ベクトルをあたえる演算子は**自明** (trivial) であるという．言い換えれば，演算子が自明であるとは，それが零演算子—その定義域はヒルベルト空間全体— のひとつの制限である場合である．

逆の関係を示そう．自然数 N に対して，集合 $\{x \in \mathsf{X} \mid |F(x)| < N\}$ の定義関数を χ_N とし，$f \in \mathsf{D}(M_F{}^*)$ とする．第 1 章の章末演習問題 23 によって，任意の $h \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，$\|h\| = \sup_{g \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X},d\mu), \|g\|=1} |\langle g, h\rangle|$ が成立することを用いると，

$$\begin{aligned}
\|M_F{}^* f\| &= \lim_{n\to\infty} \|\chi_N M_F{}^* f\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|g\|=1} |\langle g, \chi_N M_F{}^* f\rangle| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|g\|=1} |\langle M_F \chi_N g, f\rangle| \quad (\chi_N g \in \mathsf{D}(M_F) \text{ に注意}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|g\|=1} |\langle F \chi_N g, f\rangle| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|g\|=1} |\langle g, \chi_N F^* f\rangle| \\
&= \lim_{n\to\infty} \|\chi_N F^* f\|.
\end{aligned}$$

したがって，単調収束定理（付録 A の定理 A.5 を参照）により，$F^* f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ かつ $\|M_F{}^* f\| = \|F^* f\| = \|F f\|$ が結論される．ゆえに $\mathsf{D}(M_F{}^*) \subset \mathsf{D}(M_{F^*})$. 以上から，

$$(M_F)^* = M_{F^*} \tag{2.8}$$

が示された．すなわち，関数 F によるかけ算演算子の共役演算子は，その複素共役関数 F^* によるかけ算演算子に等しい．

演算子の和と積の共役演算子については，次の命題が成り立つ．

命題 2.2　(i) A, B を稠密に定義された，H から K への演算子とし，$\mathsf{D}(A+B)$ は稠密であるとする．このとき，

$$(A+B)^* \supset A^* + B^*. \tag{2.9}$$

もし，B が有界ならば，

$$(A+B)^* = A^* + B^*. \tag{2.10}$$

(ii) A を H から K への稠密に定義された演算子，B を K からヒルベルト空間 M への稠密に定義された演算子とし，$\mathsf{D}(BA)$ は稠密であるとする．このとき，

$$(BA)^* \supset A^*B^*. \tag{2.11}$$

もし，B が有界ならば，

$$(BA)^* = A^*B^*. \tag{2.12}$$

証明 (i) 任意の $\Phi \in \mathsf{D}(A^* + B^*) = \mathsf{D}(A^*) \cap \mathsf{D}(B^*)$ と $\Psi \in \mathsf{D}(A + B) = \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{D}(B)$ に対して，$\langle \Phi, (A + B)\Psi \rangle = \langle (A^* + B^*)\Phi, \Psi \rangle$. これは，$\Phi \in \mathsf{D}((A + B)^*)$ かつ $(A + B)^*\Phi = (A^* + B^*)\Phi$ を意味する．したがって，(2.9) が成立する．

B が有界ならば，任意の $\Phi \in \mathsf{D}((A + B)^*)$ と $\Psi \in \mathsf{D}(A + B) = \mathsf{D}(A)$ に対して，

$$\langle (A + B)^*\Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, (A + B)\Psi \rangle = \langle \Phi, A\Psi \rangle + \langle B^*\Phi, \Psi \rangle.$$

したがって，$\langle [(A+B)^* - B^*]\Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, A\Psi \rangle$. これが任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して成立するから，$\Phi \in \mathsf{D}(A^*) = \mathsf{D}(A^* + B^*)$ かつ $A^*\Phi = [(A+B)^* - B^*]\Phi$. よって，$\mathsf{D}((A + B)^*) \subset \mathsf{D}(A^* + B^*)$ が示されたので，(2.10) が得られる．

(ii) 任意の $\eta \in \mathsf{D}(A^*B^*)$ と $\Psi \in \mathsf{D}(BA)$ に対して，$\langle A^*B^*\eta, \Psi \rangle = \langle \eta, BA\Psi \rangle$. これは，$\eta \in \mathsf{D}((BA)^*)$ かつ $(BA)^*\eta = A^*B^*\eta$ を意味する．したがって，(2.11) が得られる．

B が有界のとき，任意の $\eta \in \mathsf{D}((BA)^*)$ と $\Psi \in \mathsf{D}(BA) = \mathsf{D}(A)$ に対して，

$$\langle (BA)^*\eta, \Psi \rangle = \langle \eta, BA\Psi \rangle = \langle B^*\eta, A\Psi \rangle.$$

したがって，$B^*\eta \in \mathsf{D}(A^*)$ [すなわち，$\eta \in \mathsf{D}(A^*B^*)$] かつ $A^*B^*\eta = (BA)^*\eta$. ゆえに (2.12) が成立する． □

第 1 章 1.4 節でユニタリ演算子を定義した．ここで，共役演算子を用いた，ユニタリ演算子の特徴づけを述べておこう．

命題 2.3　有界演算子 $U : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ がユニタリであるための必要十分条件は

$$U^*U = I_{\mathsf{H}} \tag{2.13a}$$

かつ

$$UU^* = I_{\mathsf{K}}, \tag{2.13b}$$

が成立することである．

証明　（必要性）U がユニタリならば，内積保存性により，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$\langle U\Psi, U\Phi\rangle_{\mathsf{K}} = \langle \Psi, \Phi\rangle_{\mathsf{H}}$. これと共役演算子の定義により，(2.13a) がしたがう．U は全射であるから，任意の $\eta, \eta' \in \mathsf{K}$ に対して，$\eta = U\Psi, \eta' = U\Psi'$, となる $\Psi, \Psi' \in \mathsf{H}$ がある．したがって，(2.13a) と U の内積保存性によって，

$$\langle U^*\eta, U^*\eta'\rangle_{\mathsf{H}} = \langle \Psi, \Psi'\rangle_{\mathsf{H}} = \langle U\Psi, U\Psi'\rangle_{\mathsf{K}} = \langle \eta, \eta'\rangle_{\mathsf{K}}.$$

これと $U^{**} = U$ から，(2.13b) がしたがう．

（十分性）(2.13a) は U の内積保存性を，(2.13b) は U の全射性を導く（任意の $\eta \in \mathsf{K}$ に対して，$U^*\eta = \Psi \in \mathsf{H}$ とおけば $U\Psi = \eta$）．したがって，U はユニタリである．　□

注意　一般に，V, W が有限次元のベクトル空間で $\dim \mathsf{V} = \dim \mathsf{W}$ の場合，V 全体を定義域とする，V から W への線形演算子 A について，もし，A が単射ならば，実は A は全射である（$\because \dim \mathsf{V} = \dim \mathsf{W} = N < \infty$ とし，$\{v_n\}_{n=1}^N$ を V の基底とすると，A の単射性から，$\{Av_n\}_{n=1}^N$ は W の基底になることがわかる．したがって，任意の $w \in \mathsf{W}$ に対して，定数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_N$ があって，$w = \sum_{n=1}^N \alpha_n Av_n = A(\sum_{n=1}^N \alpha_n v_n)$ と書ける．したがって，A は全射である）．この事実に注意すると，H, K が有限次元で $\dim \mathsf{H} = \dim \mathsf{K}$ の場合，(2.13a) が成り立てば，U は実は全射であるので U はユニタリである．しかし，H と K の次元が異なる場合，(2.13a) と (2.13b) のどちらか一方の条件だけでは，U がユニタリであるとは結論できない．H, K が無限次元の場合も同様．

反例　$m > n$ とし，演算子 $U : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ を $(Uz)_j = z_j$, $j = 1, \cdots, n$; $(Uz)_j = 0$, $j = n+1, \cdots, m$ $(z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n)$ によって定義する．このとき，$U^*U = I$ であるが，U は全射でないので，U はユニタリではない．

2.1.2　閉 演 算 子

ヒルベルト空間論の量子力学への応用においては，非有界演算子が重要な役割を果たすことが多い．この項では，非有界演算子の中でもある意味で扱いやすいクラスを導入する．

A をヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への演算子とする．条件

$$\Psi_n \in \mathsf{D}(A), \Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H},\ A\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{K}\ (n \to \infty),$$

をみたす，$\mathsf{D}(A)$ の中の任意の点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ かつ $\Phi = A\Psi$ が成立するとき，A を**閉演算子** (closed operator) とよぶ．

この定義から容易にわかるように，定義域が H の有界演算子はすべて閉演算子である．したがって，閉演算子という概念が実質的な意義をもつのは非有界演算子に対してである．

注意　A が非有界演算子ならば，$\Psi_n \in \mathsf{D}(A)$ があるベクトル Ψ に収束しても $A\Psi_n$ は収束するとは限らない．しかし，もし，後者もあるベクトル Φ に収束していたとしたら，必ず $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ であって，$A\Psi = \Phi$ が成り立っているというのが閉演算子の定義の要点である．

次の事実は基本的である．

命題 2.4　A を H から K への稠密に定義された演算子とする．このとき，A^* は閉演算子である．

証明　$\Psi_n \in \mathsf{D}(A^*)$ が $\Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}, A^*\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{K}$ をみたすとする．このとき，任意の $\eta \in \mathsf{D}(A)$ に対して，

$$\langle \Psi, A\eta \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi_n, A\eta \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A^*\Psi_n, \eta \rangle = \langle \Phi, \eta \rangle.$$

したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*)$ かつ $A^*\Psi = \Phi$．ゆえに，題意が示された．　□

例 2.3　$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ 上のかけ算演算子 M_F について，$(F^*)^* = F$ と (2.8) によって，$M_F = (M_{F^*})^*$．したがって，命題 2.4 を $A = M_{F^*}$ として応用すれば，M_F は閉演算子であることがわかる．関数 F が本質的に有界でないならば，M_F は非有界であるから，これは，非有界な閉演算子の例をあたえる．

A, B を H から K への線形演算子とする．このとき，A あるいは B の定性的特性のうちでどのようなものが和 $A+B$ に引き継がれるか否かを調べることは理論上も応用上も重要である．演算子 A を基準にして考えるとき，演算子 $A+B$ は，A に対する**摂動** (perturbation)B によって得られる演算子であるという．平たく言えば，A が B によって“乱されて”生じる演算子として，$A+B$ を理解するということである．この場合，当然予想されるように，A の何らかの定性的特性が $A+B$ に引き継がれるか否かは B の特性に依存する．一般に，A のある特性が $A+B$ にも引き継がれるとき，その特性は，摂動 B のもとで**安定である** (stable) という．安定性の問題は，演算子論における基本的な問題のひとつである*2.

ここでは，閉演算子の閉性に対する安定性の問題—すなわち，A が閉であるとき，B に関してどのような条件があれば，$A+B$ も閉であるかという問題—についての基本的な結果を証明しよう．次の定理は，演算子の閉性が有界演算子の摂動のもとで安定であることを主張するものである．

定理 2.5 A を H から K への閉演算子とし，$B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ とする．このとき，$A+B$ は閉演算子である．

証明 仮定により，$\mathsf{D}(A+B)=\mathsf{D}(A)$ である．$\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A+B)$, $\Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}$, $(A+B)\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{K}$ $(n \to \infty)$ が成立するとしよう．有界演算子 B の連続性により，$B\Psi_n \to B\Psi$ $(n \to \infty)$．したがって，$A\Psi_n = (A+B)\Psi_n - B\Psi_n \to \Phi - B\Psi$ $(n \to \infty)$．したがって，A の閉性によって，$\Psi \in \mathsf{D}(A) = \mathsf{D}(A+B)$ かつ $A\Psi = \Phi - B\Psi$，すなわち，$(A+B)\Psi = \Phi$．ゆえに，$A+B$ は閉である． □

閉演算子に限らず，演算子を組織的に扱うには，通常の関数のグラフの概念を抽象化して，**演算子のグラフ**なる概念を導入すると便利である．ヒルベルト

---

*2 摂動という言葉は，もともと天体力学に由来するもので，この場合には，摂動は“小さい”ものという了解がある．だが，演算子論の抽象的なレヴェルにおいては，摂動なる概念には，“小さい”ということは含まれていない．これは言葉の使い方の問題であるが，注意されたい．もちろん，演算子の摂動の問題に関して意味のある結果を導くには，演算子に関する大小の概念を導入しなければならない．この点については後出の章以降を参照されたい．

空間 H からヒルベルト空間 K への演算子 A に対し，直和 $\mathsf{H} \oplus \mathsf{K}$ の部分集合

$$\mathsf{G}(A) := \{(\Psi, A\Psi) | \Psi \in \mathsf{D}(A)\} \tag{2.14}$$

を A の**グラフ** (graph) とよぶ．直和 $\mathsf{H} \bigoplus \mathsf{K}$ の部分集合 M がある演算子のグラフになっているとき，M を単にグラフとよぶ．

$\mathsf{G}(A)$ が $\mathsf{H} \bigoplus \mathsf{K}$ の部分空間であることは容易にわかる．

グラフの概念を用いると，閉演算子は次のように特徴づけられる：

命題 2.6　H から K への演算子 A が閉であるための必要十分条件は $\mathsf{G}(A)$ が $\mathsf{H} \bigoplus \mathsf{K}$ の閉集合であることである．

証明　（必要性）$v_n = (\Psi_n, A\Psi_n) \in \mathsf{G}(A), v_n \to v := (\Psi, \Phi) \in \mathsf{H} \bigoplus \mathsf{K}\ (n \to \infty)$ としよう．このとき，$\Psi_n \to \Psi, A\Psi_n \to \Phi\ (n \to \infty)$．$A$ は閉であるから，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ かつ $A\Psi = \Phi$ したがって，$v \in \mathsf{G}(A)$．ゆえに，$\mathsf{G}(A)$ は閉である．

（十分性）$\Psi_n \in \mathsf{D}(A), \Psi_n \to \Psi, A\Psi_n \to \Phi\ (n \to \infty)$ としよう．このとき，$\mathsf{H} \bigoplus \mathsf{K}$ において，$(\Psi_n, A\Psi_n) \to (\Psi, \Phi)\ (n \to \infty)$．$\mathsf{G}(A)$ は閉であるから，$(\Psi, \Phi) \in \mathsf{G}(A)$．したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A), \Phi = A\Psi$．ゆえに，$A$ は閉である．　□

2.1.3　可閉演算子

H から K への演算子 A が**可閉演算子**であるとは，$A \subset B$ となる閉演算子 B が存在するときをいう．この場合，B を A の**閉拡大** (closed extension) という．可閉演算子の閉拡大はひとつとは限らない．定義から明らかなように，閉演算子は可閉演算子である．演算子が可閉であるための必要十分条件は次の命題によってあたえられる．

命題 2.7　次の (i), (ii) は同値である．

(i)　A は可閉である．

(ii)　$\{\Psi_n\} \subset \mathsf{D}(A)$ が $\Psi_n \to 0, A\Psi_n \to \Phi\ (n \to \infty)$ をみたすならば，$\Phi = 0$．

証明　(i) が成り立っているとする．このとき，ある閉演算子 B が存在して，$A \subset B$．したがって，(ii) の仮定のもとで $B\Psi_n \to \Phi$．B の閉性によって，$\Phi = B \cdot 0 = 0$.

逆に (ii) が成立するとしよう．このとき，演算子 $\bar{A}$ を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\bar{A}) &= \{\Psi \in \mathsf{H} | \Psi_n \to \Psi \text{かつ} \{A\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \text{が収束列となる} \\ &\qquad \text{点列} \{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{D}(A) \text{が存在}\}, \quad (2.15a) \\ \bar{A}\Psi &= \lim_{n\to\infty} A\Psi_n, \quad \Psi \in \mathsf{D}(\bar{A}). \quad (2.15b) \end{aligned}$$

条件 (ii) のおかげで，$\bar{A}\Psi$ が $\mathsf{D}(\bar{A})$ の定義においてあたえられた点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ の選び方によらず定まるので，演算子 $\bar{A}$ は確かに写像として定義されている．さらに，A の線形性によって，$\bar{A}$ も線形になる．また，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ ならば，$\Psi_n = \Psi$ ととることにより，$\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A}), \bar{A}\Psi = A\Psi$ となる．したがって，$\bar{A}$ は A の拡大である．最後に $\bar{A}$ が閉であることを示そう．そのために

$$\Psi_n \in \mathsf{D}(\bar{A}), \quad \Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}, \quad \bar{A}\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{K},$$

としよう．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある番号 N が存在して，$n \geq N$ ならば，$\|\Psi_n - \Psi\| < \varepsilon, \quad \|\bar{A}\Psi_n - \Phi\| < \varepsilon$．一方，$\bar{A}$ の定義によって，$\|\Psi_n - \eta_n\| < \varepsilon, \quad \|\bar{A}\Psi_n - A\eta_n\| < \varepsilon$ とをみたす $\eta_n \in \mathsf{D}(A)$ が存在する．3 角不等式を用いることにより，$\|\eta_n - \Psi\| < 2\varepsilon, \quad \|A\eta_n - \Phi\| < 2\varepsilon$．これは，$\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A})$ かつ $\Phi = \bar{A}\Psi$ であることを示す．よって，$\bar{A}$ は閉である．こうして，$\bar{A}$ は A のひとつの閉拡大であることがわかった．ゆえに A は可閉である．□

演算子 A が可閉のとき，(2.15a), (2.15b) によって定義される，演算子 $\bar{A}$ を A の**閉包** (closure) とよぶ．

命題 2.8　A は H から K への可閉演算子とする．このとき，次の (i)〜(iii) が成立する．

(i)　$\bar{A}$ は A の最小の閉拡大である．すなわち，A の任意の閉拡大 B に対して，$\bar{A} \subset B$ が成り立つ．

(ii)　$A \subset B$ となる任意の可閉演算子 B に対して，

$$\bar{A} \subset \bar{B} \tag{2.16}$$

(iii)

$$\overline{\mathsf{R}(A)} = \overline{\mathsf{R}(\bar{A})}. \tag{2.17}$$

証明　(i) 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A})$ に対して，$\Psi_n \to \Psi$, $A\Psi_n \to \bar{A}\Psi$ $(n \to \infty)$ となる $\Psi_n \in \mathsf{D}(A)$ が存在する．すべての n に対して $A\Psi_n = B\Psi_n$ である．したがって，$B\Psi_n \to \bar{A}\Psi$ $(n \to \infty)$．B は閉であるから，$\Psi \in \mathsf{D}(B)$ かつ $B\Psi = \bar{A}\Psi$ でなければならない．これは $\bar{A} \subset B$ を意味する．

(ii) 仮定により，$\bar{B}$ は A の閉拡大である．したがって，(i) により，(2.16) が成り立つ．

(iii) $\mathsf{R}(A) \subset \mathsf{R}(\bar{A})$ は明らか．したがって，$\overline{\mathsf{R}(A)} \subset \overline{\mathsf{R}(\bar{A})}$．逆に，$\Phi \in \mathsf{R}(\bar{A})$ とすれば，$\Phi = \bar{A}\Psi$ となる $\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A})$ がある．$\bar{A}$ の定義によって，$A\Psi_n \to \bar{A}\Psi$ $(n \to \infty)$ となる $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A)$ が存在する．したがって，$\Phi \in \overline{\mathsf{R}(A)}$．ゆえに，$\mathsf{R}(\bar{A}) \subset \overline{\mathsf{R}(A)}$．両辺の閉包をとれば，$\overline{\mathsf{R}(\bar{A})} \subset \overline{\mathsf{R}(A)}$．以上から，(2.17) が成立する．　□

命題 2.8(ii) は，閉包をとる演算が演算子の“大小関係”を保存することを示している．

次の定理は，演算子の可閉性が有界演算子の摂動のもとで安定であることを示す．

定理 2.9　A を H から K への可閉演算子とし，$B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ とする．このとき，$A + B$ は可閉であり，

$$\overline{(A+B)} = \bar{A} + B \tag{2.18}$$

が成り立つ．

証明　$\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A+B) = \mathsf{D}(A)$, $\Psi_n \to 0$, $(A+B)\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{K}$ $(n \to \infty)$ としよう．有界演算子 B の連続性により，$B\Psi_n \to 0$ $(n \to \infty)$．したがって，$A\Psi_n = (A+B)\Psi_n - B\Psi_n \to \Phi$ $(n \to \infty)$．A は可閉であるから，したがって，$\Phi = 0$ が結論される．ゆえに，命題 2.7 によって，$A + B$ は可閉である．

$A \subset \bar{A}$ より，$A + B \subset \bar{A} + B$．定理 2.5 により，$\bar{A} + B$ は閉である．したがって，命題 2.8(ii) によって，$\overline{(A+B)} \subset \bar{A} + B$．逆の大小関係を示すた

めに，$\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A}+B)=\mathsf{D}(\bar{A})$ とする．このとき，$\Psi_n \to \Psi(n\to\infty)$ かつ (2.15b) をみたす列 $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A)=\mathsf{D}(A+B)$ がとれる．B の連続性により，$B\Psi_n \to B\Psi\ (n\to\infty)$．したがって，$(A+B)\Psi_n \to (\bar{A}+B)\Psi\ (n\to\infty)$．これは，$\Psi \in \mathsf{D}(\overline{(A+B)})$ かつ $\overline{(A+B)}\Psi=(\bar{A}+B)\Psi$ を意味する．よって，(2.18) が得られる．□

2.1.4　可閉性の条件

演算子の可閉性の条件をグラフを用いて定式化しておく．

補題 2.10　直和 $\mathsf{H}\bigoplus\mathsf{K}$ の部分空間 M がグラフであるための必要十分条件は，$(0,\Phi)\in\mathsf{M}$ なる $\Phi\in\mathsf{K}$ が 0 に限られることである．

証明　必要性は，グラフの定義から明らかであろう．十分性を示そう．$(0,\Phi)\in\mathsf{M}$ なる $\Phi\in\mathsf{K}$ が 0 に限られると仮定する．集合

$$\mathsf{D}=\{\Psi\in\mathsf{H}|(\Psi,\Phi)\in\mathsf{M}\text{ となる}\Phi\in\mathsf{K}\text{ が存在 }\}$$

を考える．容易にわかるように，これは H の部分空間である．仮定から，D を定義する条件に現われるベクトル Φ は各 $\Psi\in\mathsf{D}$ に対してただひとつしかない．そこで，D から K への写像 A を $A\Psi=\Phi$ によって定義できる．これは線形である．さらに，$\mathsf{G}(A)=\mathsf{M}$ も定義から明らかであろう．したがって，M はグラフである．□

上の補題から次のことがただちにわかる．

補題 2.11　グラフの任意の部分空間はグラフである．

証明　$\mathsf{M}=\{(\Psi,\Phi)|\Psi\in\mathsf{H},\ \Phi\in\mathsf{K}\}$ を演算子 A のグラフ $\mathsf{G}(A)$ の部分空間とする．$(0,\Phi)\in\mathsf{M}$ とすれば，$\Phi=A0=0$．したがって，補題 2.10 によって，M はグラフである．□

次の命題は，演算子の可閉性について，グラフ概念を用いての特徴づけをあたえる．

命題 2.12 H から K への演算子 A が可閉であるための必要十分条件は $\mathsf{G}(A)$ の閉包 $\overline{\mathsf{G}(A)}$ がグラフになることである．この場合

$$\mathsf{G}(\bar{A}) = \overline{\mathsf{G}(A)}. \tag{2.19}$$

証明 A が可閉であるとすれば，$A \subset B$ となる閉演算子 B が存在する．このとき，$\mathsf{G}(A) \subset \mathsf{G}(B)$．$B$ は閉であるから，$\mathsf{G}(B)$ は閉である．したがって，$\overline{\mathsf{G}(A)} \subset \overline{\mathsf{G}(B)} = \mathsf{G}(B)$．したがって，補題 2.11 より，$\overline{\mathsf{G}(A)}$ はグラフである．

逆に，$\overline{\mathsf{G}(A)}$ がグラフであるとすれば，これが閉集合であることを考慮することにより，ある閉演算子 B があって，$\mathsf{G}(B) = \overline{\mathsf{G}(A)}$．したがって，$A \subset B$．ゆえに A は可閉である．(2.19) は $\bar{A}$ の定義とグラフの定義から容易にわかる． □

演算子がいつ可閉であるかを知ることは応用上も重要である．これに対するひとつの判定条件が共役演算子を用いて述べられる．

命題 2.13 演算子 A は稠密に定義されているとする．(したがって，その共役演算子 A^* が存在する)．このとき，次の (i)，(ii) が成立する：

(i) A が可閉であるための必要十分条件は $\mathsf{D}(A^*)$ が稠密であることである．この場合，$\bar{A} = A^{**}$ が成り立つ．

(ii) A が可閉ならば，$(\bar{A})^* = A^*$．

証明 (i) 命題 1.15 によって，$\overline{\mathsf{G}(A)} = (\mathsf{G}(A)^\perp)^\perp \cdots (*)$．そこで，まず，$\mathsf{G}(A)^\perp$ を求めよう．$(\Psi, \Phi) \in \mathsf{G}(A)^\perp$ とすれば，任意の $\Xi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\langle \Psi, \Xi \rangle_{\mathsf{K}} + \langle \Phi, A\Xi \rangle_{\mathsf{H}} = 0$．これは，$\Phi \in \mathsf{D}(A^*)$ かつ $A^*\Phi = -\Psi$ を意味する．したがって，

$$\mathsf{G}(A)^\perp \subset \{(-A^*\Phi, \Phi) | \Phi \in \mathsf{D}(A^*)\}.$$

この式の右辺の集合の任意の元 $(-A^*\Phi, \Phi)$ と $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，

$$\langle (\Psi, A\Psi), (-A^*\Phi, \Phi) \rangle_{\mathsf{H} \oplus \mathsf{K}} = -(\Psi, A^*\Phi)_{\mathsf{H}} + (A\Psi, \Phi)_{\mathsf{K}} = 0.$$

したがって，$(-A^*\Phi, \Phi) \in \mathsf{G}(A)^\perp$．ゆえに，

$$G(A)^\perp = \{(-A^*\Phi, \Phi) | \Phi \in \mathsf{D}(A^*)\} \tag{2.20}$$

を得る．これと $(*)$ によって，

$$\overline{\mathsf{G}(A)} = \{(\eta, \Psi) | \langle A^*\Phi, \eta\rangle = \langle \Phi, \Psi\rangle,\ \Phi \in \mathsf{D}(A^*)\}. \tag{2.21}$$

さて，A が可閉であるとし，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*)^\perp$ としよう．このとき，(2.21) により，$(0, \Psi) \in \overline{\mathsf{G}(A)}$．$A$ の可閉性により $\overline{\mathsf{G}(A)}$ はグラフであるから（命題 2.12），$\Psi = 0$ でなければならない．よって $\mathsf{D}(A^*)$ は稠密である．

逆に，$\mathsf{D}(A^*)$ が稠密であるとし，$(0, \Phi) \in \overline{\mathsf{G}(A)}$ としよう．このとき，(2.21) により，すべての $\eta \in \mathsf{D}(A^*)$ に対して，$\langle \eta, \Phi\rangle_{\mathsf{K}} = 0$．したがって，$\Phi = 0$．ゆえに，補題 2.6 によって，$\overline{\mathsf{G}(A)}$ はグラフである．よって，命題 2.12 によって A は可閉である．

$\mathsf{D}(A^*)$ が稠密であれば，$A^{**} = (A^*)^*$ が存在する．このとき，(2.21) は

$$\overline{\mathsf{G}(A)} = \{(\eta, A^{**}\eta) | \eta \in \mathsf{D}(A^{**})\}$$

と同値である．したがって，$\bar{A} = A^{**}$.

(ii) A を可閉演算子とする．$\Phi \in \mathsf{D}(\bar{A})$ とすれば，$\Phi_n \to \Phi, A\Phi_n \to \bar{A}\Phi$ $(n \to \infty)$ となる $\Phi_n \in \mathsf{D}(A)$ がある．任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A^*)$ に対し，$\langle A^*\Psi, \Phi_n\rangle = \langle \Psi, A\Phi_n\rangle$ であるから，$n \to \infty$ とすることにより $\langle A^*\Psi, \Phi\rangle = \langle \Psi, \bar{A}\Phi\rangle$．したがって，$\Psi \in \mathsf{D}((\bar{A})^*)$ かつ $(\bar{A})^*\Psi = A^*\Psi$．これは，$A^* \subset (\bar{A})^*$ を意味する．逆に $\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A})^*$ とすれば，すべての $\Phi \in \mathsf{D}(\bar{A})$ に対して，$\langle (\bar{A})^*\Psi, \Phi\rangle = \langle \Psi, \bar{A}\Phi\rangle$．特に $\Phi \in \mathsf{D}(A) \subset \mathsf{D}(\bar{A})$ とすれば $\langle (\bar{A})^*\Psi, \Phi\rangle = \langle \Psi, A\Phi\rangle$．したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*)$ かつ $A^*\Psi = (\bar{A})^*\Psi$．これは $(\bar{A})^* \subset A^*$ を意味する．これとすでに得た結果をあわせて $A^* = (\bar{A})^*$ を得る． □

例 2.4 すべての $n \geq 1$ と $j = 1, \cdots, d$ に対して，偏微分演算子 ∂_j^n（例 1.25）は可閉である．実際，任意の $f, g \in \mathsf{D}(\partial_j^n) = \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，部分積分により，

$$\langle g, \partial_j^n f\rangle = (-1)^n \langle \partial_j^n g, f\rangle$$

であることがわかる．これは，$g \in \mathsf{D}((\partial_j^n)^*)$ かつ $(\partial_j^n)^* g = (-1)^n \partial_j^n g$ を意味する．したがって，

$$(-1)^n \partial_j^n \subset (\partial_j^n)^*. \tag{2.22}$$

特に，$\mathsf{D}((\partial_j^n)^*)$ は稠密である．よって，命題 2.13(i) によって，∂_j^n は可閉である[*3]．

注意 後に示すように（3 章を参照），∂_j^n は閉ではない．

2.1.5 閉演算子が有界となる条件

2.1.1 項のはじめの方でふれたように，ヒルベルト空間全体を定義域とする有界演算子は閉演算子である．では，逆に，どのような条件がみたされれば，閉演算子は有界になるでろうか．この問いに答えるのが次の重要な定理である．

定理 2.14 A を H から K への閉演算子で，$\mathsf{D}(A) = \mathsf{H}$ であるとする．このとき，A は有界である．

この定理は，定義域がヒルベルト空間全体であるような閉演算子は必ず有界であることを主張するものである．

定理 2.14 は，実は，もっと一般的な次の定理をヒルベルト空間の場合に特殊化したものである．

定理 2.15 **閉グラフ定理** (closed graph theorem)．X, Y をバナッハ空間，A を X から Y への閉演算子で，$\mathsf{D}(A) = \mathsf{X}$ であるとする．このとき，A は有界である[*4]．

閉グラフ定理は，バナッハ空間全体を定義域とする閉演算子は必然的に有界になっているということを主張するものである．この定理の対偶を考えれば，**非有界な閉演算子の定義域はバナッハ空間全体にはなり得ない**ことが結論される．

以下に閉グラフ定理の証明を述べるが，はじめて本書を読む読者はこの部分をとばして読んでも差し支えない．証明の本質は，バナッハ空間の完備性に関

---

*3 別証として，命題 2.7(ii) の条件を直接確かめてもよい．

*4 バナッハ空間の場合も，線形演算子の有界性や閉性はヒルベルト空間の場合と全く同様に定義される：A を X から Y への線形演算子とする（X から Y への線形演算子の定義は，1.2.1 項における線形演算子の定義において，H, K をそれぞれ，X, Y に置き換えたものによってあたえられる）．A が有界であるとは，定数 $C > 0$ が存在して，$\|A\Psi\|_{\mathsf{Y}} \leq C\|\Psi\|_{\mathsf{X}}$，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ が成り立つときをいう．また，2.1.2 項の閉演算子の定義において，H, K をそれぞれ，X, Y で置き換えれば，バナッハ空間における閉演算子の定義となる．

わる一種の幾何学的構造定理（以下の補題 2.17）を用いて，空間と演算子の線形構造を注意深く解析する点にある．

X をバナッハ空間とする．ヒルベルト空間の場合と同様に，ベクトル $\Psi \in \mathsf{X}$ と正数 r に対して，集合

$$B_r(\Psi) = \{\Phi \in \mathsf{X} | \, \|\Psi - \Phi\|_{\mathsf{X}} < r\} \tag{2.23}$$

を，Ψ を中心とする，半径 r の**開球**という．

次の補題は開集合のひとつの特徴づけをあたえる[*5]．

補題 2.16　バナッハ空間 X の部分集合 D が開集合であるための必要十分条件は，D の各点 Ψ に対して，Ψ を中心とする，適当な半径の開球が D に含まれること，すなわち，ある正数 r が存在して，$B_r(\Psi) \subset \mathsf{D}$ が成立することである．

証明　（必要性）対偶を証明する．ある $\Psi_0 \in \mathsf{D}$ があって，Ψ_0 を中心とする，どんな開球も D に含まれないとすると，任意の自然数 n に対して，$\|\Psi_n - \Psi_0\| \leq 1/n$ をみたす $\Psi_n \in \mathsf{D}^c$ が存在する．これは，$\Psi_n \to \Psi_0$ $(n \to \infty)$ を意味する．したがって，D^c は閉集合ではない．ゆえに，D は開集合ではない．

（十分性）D が開集合でないとすれば，D^c は閉集合でない．したがって，あるベクトル $\Psi \in \mathsf{D}$ と $\Psi_n \in \mathsf{D}^c, \Psi_n \to \Psi \in \mathsf{D}(n \to \infty)$ となる点列 $\{\Psi_n\}_n$ が存在する．これは，$\Psi \in \mathsf{D}$ を中心とする，すべての開球が D^c の点を含むことを意味する．したがって,「D の各点に対して，これを中心とする，適当な開球が D に含まれる」という主張は成立しない．□

補題 2.17　ベール (Baire)-ハウスドルフ (Hausdorff) の定理．バナッハ空間 X が可算個の閉集合 $\mathsf{X}_n, n = 1, 2, \cdots$, の和集合として，$\mathsf{X} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n$ のように表わされたとすれば，$\mathsf{X}_n, n = 1, 2, \cdots$, のうち少なくともひとつは開球を含む．

証明　仮にどの X_n も開球を含まないとしてみよう．このとき，任意の点 $\Psi_0 \in \mathsf{X}$ と任意の正数 r に対して，Ψ_0 を中心とする，半径 r の閉球 $\overline{B_r(\Psi_0)} = \{\Phi | \, \|\Psi -$

[*5] バナッハ空間における閉集合や開集合についても，ヒルベルト空間におけるそれと全く同じ仕方で定義される：1.1.4 項における閉集合，開集合の定義において，H をバナッハ空間に置き換えて読めばよい．

$\Phi\| \le r\}$ は X_1 には含まれない．したがって，$\mathsf{X}_1^c \cap \overline{B_r(\Psi_0)}$ は空ではない．ゆえに，$\Psi_1 \in \mathsf{X}_1^c$ となるベクトル $\Psi_1 \in \mathsf{X}$ が存在する．X_1^c は開集合であるから，補題 2.16 によって，ある正数 $r_1 < 1$ が存在して

$$\mathsf{B}_1 = \{\Psi \in \mathsf{X} | \, \|\Psi - \Psi_1\| < r_1\} \subset \mathsf{X}_1^c$$

が成り立つ．X_2 も開球を含まないから，同様にして，$\Psi_2 \in \mathsf{B}_1 \setminus \mathsf{X}_2$ なるベクトル Ψ_2 が存在する．X_2^c は開集合であるから，ある正数 $r_2 < 1/2$ が存在して

$$\mathsf{B}_2 = \{\Psi \in \mathsf{X} | \, \|\Psi - \Psi_2\| < r_2\} \subset \mathsf{X}_2^c, \quad \bar{B}_2 \subset \mathsf{B}_1$$

が成立する．この手続きを繰り返せば，次の性質をもつベクトル列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathsf{X}$ と $0 < r_n < 1/2^{n-1}$ をみたす数列 $\{r_n\}_{n=1}^\infty$ がとれる：

$$\mathsf{B}_n = \{\Psi \in \mathsf{X} | \, \|\Psi - \Psi_n\| < r_n\}$$

とすれば，

$$\Psi_n \in \mathsf{B}_{n-1} \setminus \mathsf{X}_n, \quad \bar{\mathsf{B}}_n \subset \mathsf{B}_{n-1}, \ \mathsf{B}_n \cap \mathsf{X}_n = \emptyset.$$

したがって，$N \ge 1$ を任意として，$n, m \ge N+1$ とすれば，$\Psi_n, \Psi_m \in \mathsf{B}_N$ であるから，

$$\begin{aligned} \|\Psi_n - \Psi_m\| &= \|\Psi_n - \Psi_N + \Psi_N - \Psi_m\| \\ &\le \|\Psi_n - \Psi_N\| + \|\Psi_N - \Psi_m\| \\ &\le 2r_N \le \frac{1}{2^{N-2}}. \end{aligned}$$

ゆえに，$\{\Psi_n\}_{n=1}^\infty$ は X のコーシー列である．X は完備であるから，$\Psi_n \to \Psi$ となる $\Psi \in \mathsf{X}$ が存在する．$n \ge N+2$ ならば $\Psi_n \in \mathsf{B}_{N+1}$ であるから，$\Psi \in \bar{\mathsf{B}}_{N+1} \subset \mathsf{B}_N$．したがって，$\Psi \notin \mathsf{X}_N$．$N$ は任意であったから，$\Psi \notin \cup_{n=1}^\infty \mathsf{X}_n$．これは，$\mathsf{X} = \cup_{n=1}^\infty \mathsf{X}_n$ に矛盾する． □

定理 2.15 の証明

X の部分集合 $\mathsf{X}_1 = \{\Psi \in \mathsf{X} | \, \|A\Psi\| < 1\}$ を考え，正数 a に対して，$X_a = a\mathsf{X}_1 := \{a\Psi | \Psi \in \mathsf{X}_1\}$ とおく．$A\Psi = 0$ ならば，$\Psi \in \mathsf{X}_1$．$A\Psi \ne 0$ ならば，

$\Psi/(\|A\Psi\|+1) \in \mathsf{X}_1$ であるから，$\Psi \in \mathsf{X}_{\|A\Psi\|+1}$．また，$a \le n$ (n は自然数) ならば，$\mathsf{X}_a \subset \mathsf{X}_n$．これらの事実と仮定 $\mathsf{D}(A) = \mathsf{X}$ によって，$\mathsf{X} = \cup_{n=1}^{\infty}\mathsf{X}_n$ と書ける．したがって，特に，$\mathsf{X} = \cup_{n=1}^{\infty}\bar{\mathsf{X}}_n$．$\bar{\mathsf{X}}_n$ は閉集合であるから，補題 2.17 によって，ある番号 k があって，$\bar{\mathsf{X}}_k$ は開球を含む．$\bar{\mathsf{X}}_k = \overline{k\mathsf{X}_1}$ であるから，$\bar{\mathsf{X}}_1$ はある開球を含むことになる．この開球を $B_r(\Psi_0)$ としよう．$\|\Psi\| < 2r$ をみたす任意の $\Psi \in \mathsf{X}$ をとる．これに対して，$\Psi' = \frac{\Psi}{2} + \Psi_0, \Psi'' = -\frac{\Psi}{2} + \Psi_0$ とおけば，$\Psi', \Psi'' \in B_r(\Psi_0)$ であり，$\Psi = \Psi' - \Psi''$ が成り立つ．$B_r(\Psi_0) \subset \bar{\mathsf{X}}_1$ であるから，$\Psi'_n \to \Psi', \Psi''_n \to \Psi''$ $(n \to \infty)$ となる $\Psi'_n, \Psi''_n \in \mathsf{X}_1$ がある．このとき，

$$\|A(\Psi'_n - \Psi''_n)\| \le \|A\Psi'_n\| + \|A\Psi''_n\| < 2.$$

したがって，$\Psi'_n - \Psi''_n \in \mathsf{X}_2$．ゆえに，$\Psi = \lim_{n\to\infty}(\Psi'_n - \Psi''_n) \in \bar{\mathsf{X}}_2$．こうして，$\|\Psi\| < 2r$ ならば，$\Psi \in \bar{\mathsf{X}}_2$ が示された．これから，任意の $a > 0$ に対して，$\|\Psi\| < ar$ ならば，$\Psi \in \bar{\mathsf{X}}_a$ が導かれる（$\|2\Psi/a\| < 2r$ であるから，$2\Psi/a \in \bar{\mathsf{X}}_2$，すなわち，$\Psi \in \bar{\mathsf{X}}_a$）．

さて，$\|\Psi\| < r$ をみたす任意の $\Psi \in \mathsf{X}$ と $0 < \varepsilon < 1$ をみたす実数 ε をとる．前段の結果，$\Psi \in \bar{\mathsf{X}}_1$．したがって，$\|\Psi - \Psi_1\| < \varepsilon r$ をみたすベクトル $\Psi_1 \in \mathsf{X}_1$ が存在する．この場合，$\|A\Psi_1\| < 1$．再び，前段の結果を用いると，$\Psi - \Psi_1 \in \bar{X}_\varepsilon$．したがって，$\|\Psi - \Psi_1 - \Psi_2\| < \varepsilon^2 r$ をみたす $\Psi_2 \in \mathsf{X}_\varepsilon$ がとれる．この場合，$\|A\Psi_2\| < \varepsilon$．以下，同様にして，点列 $\{\Psi_n\}_n$ で次の性質をみたすものがとれる：

$$\Psi_n \in \mathsf{X}_{\varepsilon^{n-1}},\ \|\Psi - \Psi_1 - \cdots - \Psi_n\| < \varepsilon^n r,\ \|A\Psi_n\| < \varepsilon^{n-1}.$$

したがって，$\Phi_n = \sum_{j=1}^n \Psi_j$ とおけば，$\Phi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$．また，$m > n$ のとき，

$$\begin{aligned}\|A\Phi_n - A\Phi_m\| &\le \sum_{j=n+1}^{m} \|A\Psi_j\| < \varepsilon^n + \varepsilon^{n+1} + \cdots = (1-\varepsilon)^{-1}\varepsilon^n \\ &\to 0 \quad (n, m \to \infty).\end{aligned}$$

$m < n$ の場合も同様．したがって，$\{A\Phi_n\}_n$ はコーシー列である．A は閉であるから，$A\Phi_n \to A\Psi$ $(n \to \infty)$ が結論される．この事実と

$$\|A\Phi_n\| \le 1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots = (1-\varepsilon)^{-1}$$

によって，$\|A\Psi\| \le (1-\varepsilon)^{-1}$．そこで，$\varepsilon \downarrow 0$ とすれば，$\|A\Psi\| \le 1$．はじめの条件によって，これは，$\|\Psi\| < r$ をみたす任意の $\Psi \in \mathsf{X}$ に対して成り立つ．一般の $\Psi \in \mathsf{X}, \Psi \neq 0$, に対しては，$\Phi = r\Psi/(\delta\|\Psi\|)$ $(\delta > 1$ は任意$)$ とおいて考えればよい．実際，このとき，$\|\Phi\| < r$ であるので，$\|A\Phi\| \le 1$．したがって，$\|A\Psi\| \le \delta r^{-1}\|\Psi\|$．ゆえに，$A$ は有界である．　□

2.2　レゾルヴェントとスペクトル

ヒルベルト空間 H 上の線形演算子に同伴する複素数の集合を定義し，その対応関係を考察する．

2.2.1　定　義　と　例

線形代数学においてよく知られているように，有限次元ベクトル空間上の線形演算子は正方行列によって表わされる．正方行列に対しては，固有値という概念が定義された．これは行列と一組の数の間のひとつの対応をあたえる．ヒルベルト空間上の線形演算子に対しても，行列の場合と同様に，固有値という概念が定義される．H をヒルベルト空間，A を H 上の線形演算子とする．D(A) の 0 でないベクトル Ψ と複素数 λ があって，$A\Psi = \lambda\Psi$ が成立するとき，λ を A の**固有値** (eigenvalue)，Ψ を λ に属する（対応する），A の**固有ベクトル** (eigenvector) という．$A\Psi = \lambda\Psi$ を A の**固有ベクトル方程式**とよぶ．A の固有値の集合を $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ で表わす．

今後，スカラー $\alpha \in \mathbb{C}$ をかける演算子 αI をしばしば単に α と記す．

演算子 A の固有ベクトル方程式は $(A-\lambda)\Psi = 0$ と書き直せる．したがって，複素数 λ が A の固有値であるとは，言い換えれば，$\ker(A-\lambda) \neq \{0\}$ ということであり，λ に属する，A の固有ベクトルは，$\ker(A-\lambda)$ に属する 0 でないベクトルのことにほかならない．

複素数 λ が A の固有値のとき，$\ker(A-\lambda)$ を，λ に対応する（属する），A の**固有空間** (eigenspace) とよぶ．$\dim\ker(A-\lambda)$ を固有値 λ の**多重度** (multiplicity) という．多重度が 1 の固有値は**単純** (simple) とよばれ，多重度が 2 以上の固有値は**縮退** (degenerate) しているという．

L^2 空間のように，ヒルベルト空間が関数（の同値類）から構成される場合，このヒルベルト空間上の演算子の固有ベクトルは**固有関数** (eigenfunction) ともよばれる．

例 2.5　$\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ 上で次の演算子を定義する：

$$\mathsf{D}(\widetilde{p}) = \mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi] \quad (\text{例 1.20 を参照}),$$
$$(\widetilde{p}f)(x) = -i\frac{d}{dx}f(x).$$

$\phi_n(x) = e^{inx}/\sqrt{2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$, とすれば（例 1.9 を参照），$\phi_n \in \mathsf{D}(\widetilde{p})$ であり，

$$\widetilde{p}\phi_n = n\phi_n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

が成り立つ．したがって，演算子 $\widetilde{p}$ は固有値 n をもち，ϕ_n は演算子 $\widetilde{p}$ の固有値 n に属する固有関数である．

この場合，固有値 n の多重度は 1 であることも容易にわかる．実際，$\widetilde{p}$ の固有ベクトル方程式 $\widetilde{p}f = \lambda f$, $f \in \mathsf{D}(\widetilde{p})$ は微分方程式 $f' = i\lambda f, f \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi]$ と同値である．したがって，$f(x) = ce^{i\lambda x}$ (c は定数) となるが，$f \in \mathsf{C}^1_{\mathrm{P}}[0,2\pi]$ により，$f(0) = f(2\pi)$ であるから，λ は整数でなければならない．

いまの導出の際に定義域が重要な役割を演じていることに注意しよう．たとえば，$\widetilde{p}$ を $\mathsf{C}^\infty_0((0,2\pi))$ に制限して得られる演算子

$$p_0 := \widetilde{p} \restriction \mathsf{C}^\infty_0((0,2\pi))$$

は（$\widetilde{p}$ と作用の形は同じだが）固有値をもたない．

例 1.20 で見たように，ϕ_n はフーリエ級数展開を司る関数である．上のことから，フーリエ級数というのは，演算子 $\widetilde{p}$ の固有関数による級数展開である，という重要な特徴づけが得られる．ちなみに，この観点はもっと一般化することが可能であり，演算子の固有関数による関数の級数展開，すなわち，**固有関数展開** (eigenfunction expansion) という概念をもたらす．

例 2.5 の中でふれた演算子 p_0 のように，作用するヒルベルト空間が無限次元の場合，固有値を全然もたない演算子が存在しうることには留意すべきである．もうひとつ例をあげよう．

例 2.6　ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ で関数 $F(x) = x$ によるかけ算演算子 M_x を $\hat{x}$ とする：

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\hat{x}) \ &:= \ \left\{ f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) \middle| \int_{\mathbb{R}} |xf(x)|^2 dx < \infty \right\}, \\ (\hat{x}f)(x) \ &:= \ xf(x), \quad f \in \mathsf{D}(\hat{x}). \end{aligned}$$

演算子 $\hat{x}$ は固有値をもたない．すなわち，$\sigma_{\mathrm{p}}(\hat{x}) = \emptyset$．これは次のようにしてわかる．仮に，$\lambda \in \mathbb{C}$ が $\hat{x}$ の固有値であるとし，これに属する固有ベクトルを $f \neq 0$ とすれば，$f \in \mathsf{D}(\hat{x})$ に対する固有ベクトル方程式 $\hat{x}f = \lambda f$ は，$(x - \lambda)f(x) = 0$, a.e.$x \in \mathbb{R}$，を導く．この式と f との内積を考えることにより，λ は実数でなければならないことがわかる．したがって，$x = \lambda$ を除く a.e. の点 x で，$f(x) = 0$．だが，ひとつの実数 $\{\lambda\}$ からなる集合のルベーグ測度は 0 であるから，結局，$f(x) = 0$, a.e.$x \in \mathbb{R}$．これは，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ の元として，$f = 0$ を意味する．したがって，矛盾が生じる．

注意　演算子 $\hat{x}$ と同じ形の作用をもつ演算子を超関数の空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$（付録 C.2 参照）で考えると事情は異なってくる．実際，$\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ において働く線形演算子 $\tilde{x}$ を

$$D(\tilde{x}) := \mathcal{D}(\mathbb{R})', \quad (\tilde{x}\phi)(x) := x\phi(x), \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})',$$

によって定義し—したがって，$\tilde{x} \restriction \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) \cap D(\hat{x}) = \hat{x}$—，任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，δ_λ を点 λ に質量をもつデルタ超関数とすれば（付録 C.2.2 項参照），$\tilde{x}\delta_\lambda = \lambda\delta_\lambda$ が成り立つ．つまり，λ は $\tilde{x}$ の固有値であり，δ_λ はその固有ベクトルである．

この例からも示唆されるように，無限次元のヒルベルト空間上の演算子 A と数との対応を得るには，固有値の概念だけでは不十分であり，固有値の概念の一般化をさがす必要がある．この一般化は，複素数 λ に対して，演算子 $A - \lambda$ を考え，この演算子の写像特性に応じて，λ を分類することによってなされる．

A をヒルベルト空間 H 上の演算子，$\lambda \in \mathbb{C}$ とする．演算子 $A - \lambda$ が二つの条件：(i) $A - \lambda$ は単射であり，$(A - \lambda)^{-1}$ $(\mathsf{D}((A - \lambda)^{-1}) = \mathsf{R}(A - \lambda))$ は有

界である；(ii) $\mathsf{R}(A-\lambda)$ は稠密である，をみたすとき，λ は A の**レゾルヴェント集合** (resolvent set) に属するという．この場合，

$$R_\lambda(A) = (A-\lambda)^{-1} \tag{2.24}$$

を A の λ における**レゾルヴェント** (resolvent) あるいは単にレゾルヴェントという[*6]．A のレソルヴェント集合を $\varrho(A)$ で表わす．

レゾルヴェント集合に関していくつかの注意を述べる．次の命題は，可閉演算子のレゾルヴェント集合とその閉包のそれが一致することを示す．

命題 2.18　A を H 上の可閉演算子とする．このとき，

$$\varrho(A) = \varrho(\bar{A}) \tag{2.25}$$

であり，任意の $\lambda \in \varrho(A)$ に対して，

$$\mathsf{R}(\bar{A}-\lambda) = \mathsf{H}, \tag{2.26}$$

$$\overline{R_\lambda(A)} = R_\lambda(\bar{A}) \tag{2.27}$$

が成り立つ．

証明　$\lambda \in \varrho(A)$ とする．このとき，$\mathsf{R}(A-\lambda)$ は稠密であるから，任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$(A-\lambda)\Psi_n \to \Phi$ $(n\to\infty)$ となる $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A-\lambda) = \mathsf{D}(A)$ が存在する．$\Xi_n = (A-\lambda)\Psi_n$ とおけば，$\{\Xi_n\}_n$ はコーシー列である．$(A-\lambda)^{-1}$ の有界性により，$\{(A-\lambda)^{-1}\Xi_n\}_n = \{\Psi_n\}_n$ もコーシー列である．したがって，$\Psi_n \to \Psi$ $(n\to\infty)$ となる $\Psi \in \mathsf{H}$ が存在する．演算子 $A-\lambda$ は可閉であるから（定理 2.9 を参照），$\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A}-\lambda)$ かつ $(\bar{A}-\lambda)\Psi = \Phi$ が得られる．したがって，(2.26) が成立する．

$\Psi \in \ker(\bar{A}-\lambda)$ とすれば，$\Psi_n \to \Psi$, $(A-\lambda)\Psi_n \to (\bar{A}-\lambda)\Psi = 0$ $(n\to\infty)$ となる $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A)$ が存在する．$(A-\lambda)^{-1}$ は有界であるから，$\Psi_n \to (A-\lambda)^{-1}0 = 0$ $(n\to\infty)$．したがって，$\Psi = 0$．ゆえに，$\bar{A}-\lambda$ は単射である．

---

*6　$(\lambda-A)^{-1}$ を A のレゾルヴェントという流儀もあるので，他の文献を読む場合は注意されたい．

$C = \|(A-\lambda)^{-1}\|$ とすれば，各 $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\Psi = (A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)\Psi$ より，

$$\|\Psi\| \le C\|(A-\lambda)\Psi\|, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A), \tag{2.28}$$

が成立する．任意の $\Psi \in \mathsf{D}(\bar{A}-\lambda)$ に対して，$\Psi_n \to \Psi$，$(A-\lambda)\Psi_n \to (A-\lambda)\Psi$ $(n \to \infty)$ をみたす $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A)$ がとれる．(2.28) の Ψ のところに Ψ_n を代入し，$n \to \infty$ とすれば，

$$\|\Psi\| \le C\|(\bar{A}-\lambda)\Psi\|$$

が得られる．したがって，$(\bar{A}-\lambda)^{-1}$ は有界であり，$\|\bar{A}-\lambda)^{-1}\| \le C$.

以上から，$\lambda \in \varrho(\bar{A})$．したがって，

$$\varrho(A) \subset \varrho(\bar{A}). \tag{2.29}$$

逆に，$\lambda \in \varrho(\bar{A})$ としよう．このとき，$A-\lambda \subset \bar{A}-\lambda$ から，$A-\lambda$ の単射性と $(A-\lambda)^{-1}$ は有界性が導かれる．命題 2.8(iii) によって，$\overline{\mathsf{R}(A-\lambda)} = \overline{\mathsf{R}(\bar{A}-\lambda)} = \mathsf{H}$ であるから，$\mathsf{R}(A-\lambda)$ は稠密である．ゆえに，$\lambda \in \varrho(A)$．したがって，(2.29) の逆の包含関係が成立する．よって，(2.25) を得る．

最後に (2.27) を示そう．まず，

$$R_\lambda(A) \subset R_\lambda(\bar{A})$$

は明らか．(2.26) によって，$\mathsf{D}(R_\lambda(\bar{A})) = \mathsf{H}$．これと拡大定理の一意性により，(2.27) が得られる． □

閉演算子のレゾルヴェントについては，次の事実が成立する．

命題 2.19 A を H 上の閉演算子とする．このとき，$\lambda \in \varrho(A)$ であるための必要十分条件は，$A-\lambda$ が全単射であることである．

証明 （必要性） $\lambda \in \varrho(A)$ とする．閉演算子は可閉演算子であるから，命題 2.18 によって，$\mathsf{R}(A-\lambda) = \mathsf{H}$．したがって，$A-\lambda$ は全射である．ゆえに，$A-\lambda$ は全単射である．

（十分性） $A-\lambda$ が全単射であるとする．このとき，$\lambda \in \varrho(A)$ をいうには，$(A-\lambda)^{-1}$ の有界性を示せばよい．いまの場合，$\mathsf{D}((A-\lambda)^{-1}) = \mathsf{R}(A-\lambda) = \mathsf{H}$ であるから，閉グラフ定理（定理 2.14）により，$(A-\lambda)^{-1}$ が閉演算子であることを示せばよい．そこで，$\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{H}$，$\Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}$，$(A-\lambda)^{-1}\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{H}$ $(n \to \infty)$ とする．$\Phi_n = (A-\lambda)^{-1}\Psi_n$ とおくと，$\Phi_n \to \Phi$，$(A-\lambda)\Phi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$．演算子 $A-\lambda$ は閉であるから（定理 2.5），$\Phi \in \mathsf{D}(A-\lambda) = \mathsf{D}(A)$ かつ $(A-\lambda)\Phi = \Psi$．したがって，$\Phi = (A-\lambda)^{-1}\Psi$．ゆえに，$(A-\lambda)^{-1}$ は閉である． □

注意 上の命題 2.19 に基づいて，閉演算子 A のレゾルヴェント集合は，$\{\lambda \in \mathbb{C} \mid A-\lambda$ が全単射$\}$ として定義される場合がある．

H 上の演算子 A のレゾルヴェント集合の補集合

$$\sigma(A) := \mathbb{C} \setminus \varrho(A) \tag{2.30}$$

を A の**スペクトル** (spectrum) とよぶ．

上の定義から，

$$\varrho(A) \cap \sigma(A) = \emptyset, \quad \varrho(A) \cup \sigma(A) = \mathbb{C}. \tag{2.31}$$

容易にわかるように，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \sigma(A). \tag{2.32}$$

後に見るように，演算子のスペクトルは量子力学への応用において，物理的に重要な意味をもつ．

演算子のスペクトルは，次のように，さらに細かく分けることができる：

(1)

$$\sigma_{\mathrm{c}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid A-\lambda \text{ は単射，} \mathsf{R}(A-\lambda) \text{ は稠密，かつ } (A-\lambda)^{-1} \text{ は非有界}\}. \tag{2.33}$$

この集合を A の**連続スペクトル** (continuous spectrum) という．

(2)

$$\sigma_{\mathrm{r}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \ A - \lambda \text{ は単射かつ } \mathsf{R}(A-\lambda) \text{ は稠密でない } \}. \tag{2.34}$$

この集合を A の**剰余スペクトル** (residual spectrum) という．

容易にわかるように，$\sigma_{\mathrm{p}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{c}}(A)$, $\sigma_{\mathrm{r}}(A)$ は互いに共通部分をもたず，

$$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{c}}(A) \cup \sigma_{\mathrm{r}}(A) \tag{2.35}$$

が成立する（下図を参照）．

$$A - \lambda : \begin{cases} (1)\ \text{単射} \begin{cases} \mathsf{R}(A-\lambda) : \text{稠密} \begin{cases} (A-\lambda)^{-1} \text{ が有界} \iff \lambda \in \varrho(A) \\ (A-\lambda)^{-1} \text{ が非有界} \iff \lambda \in \sigma_c(A) \end{cases} \\ \mathsf{R}(A-\lambda) : \text{稠密でない} \iff \lambda \in \sigma_r(A) \end{cases} \\ (2)\ \text{単射でない} \iff \lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) \end{cases}$$

$A - \lambda$ の写像特性の分類

例 2.7　例 2.6 の演算子 $\hat{x}$ のスペクトルを求めてみよう．$\hat{x}$ が閉であることはすでに示した（例 2.3）．$\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ならば，$|x - \lambda| \geq |\mathrm{Im}\,\lambda| > 0$ であるから，1 章の例 1.29 によって，$\hat{x} - \lambda$ は全単射である．この場合，$(\hat{x} - \lambda)^{-1}$ は有界な関数 $(x - \lambda)^{-1}$ によるかけ算演算子であるから，有界である（例 1.31）．したがって，$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \varrho(\hat{x})$．ゆえに，$\sigma(\hat{x}) \subset \mathbb{R}$.

任意の実数 λ に対して，例 2.6 によって，$\hat{x} - \lambda$ は単射であり，$(\hat{x} - \lambda)^{-1}$ は関数 $(x - \lambda)^{-1}$ によるかけ算演算子であり，この関数は，ルベーグ測度に関して a.e. 有限であるから，$\mathsf{D}((\hat{x} - \lambda)^{-1}) = \mathsf{R}(\hat{x} - \lambda)$ は $L^2(\mathbb{R})$ で稠密である．だが，この関数は（ルベーグ測度に関して）本質的に有界ではないから，$(\hat{x} - \lambda)^{-1}$ は有界ではない（例 1.31）．したがって，$\lambda \in \sigma_{\mathrm{c}}(\hat{x})$．以上から，

$$\sigma(\hat{x}) = \sigma_{\mathrm{c}}(\hat{x}) = \mathbb{R}, \quad \sigma_{\mathrm{p}}(\hat{x}) = \sigma_{\mathrm{r}}(\hat{x}) = \emptyset, \tag{2.36}$$

が示されたことになる．つまり，$\hat{x}$ のスペクトルは実数全体であり，連続的に分布している．

例 2.8　ヒルベルト空間 l^2 において，演算子 S を次のように定義する：

$$\mathsf{D}(S) := l^2, \quad Sa := (0, a_1, a_2, \cdots), \quad a = (a_1, a_2, \cdots) \in l^2.$$

これを**右シフト演算子**という．$Sa=0$ ならば，$a=0$ であることは明らか．したがって，S は単射である．$a_1 \neq 0,\ a_n=0, n \geq 2$ をみたす l^2 の元 $a=\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は $\mathsf{R}(S)$ に属さないので $\mathsf{R}(S)$ は稠密でない．したがって，$0 \in \sigma_{\mathrm{r}}(S)$．こうして，$S$ は剰余スペクトルが空でない演算子の一例をあたえることがわかる．この演算子のスペクトルの詳細については，章末演習問題 24，25 を参照されたい．

2.2.2 レゾルヴェントの基本的性質

$\varepsilon>0$ に対して，複素平面 $\mathbb{C}$ 上の点 a の ε 近傍を

$$U_\varepsilon(a)=\{\lambda \in \mathbb{C}|\ |\lambda-a|<\varepsilon\} \tag{2.37}$$

によって定義する．

定理 2.20 A をヒルベルト空間 H 上の閉演算子とし，$\varrho(A) \neq \emptyset$ とする．このとき，任意の $\lambda_0 \in \varrho(A)$ に対して，

$$U_{\|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}}(\lambda_0) \subset \varrho(A) \tag{2.38}$$

であり，

$$R_\lambda(A)=\sum_{n=0}^\infty R_{\lambda_0}(A)^{n+1}(\lambda-\lambda_0)^n, \quad \lambda \in U_{\|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}}(\lambda_0), \tag{2.39}$$

が成り立つ．したがって，特に，A のレゾルヴェント集合 $\varrho(A)$ は $\mathbb{C}$ の開集合である．

証明 $K_\lambda := (\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)$ とおくと，

$$A-\lambda=(1-K_\lambda)(A-\lambda_0) \tag{2.40}$$

と書ける．演算子 K_λ は有界であり，$\|K_\lambda\| = |\lambda_0-\lambda|\,\|R_{\lambda_0}(A)\|$．そこで，$\varepsilon_0=1/\|R_{\lambda_0}(A)\|$ とおけば，任意の $\lambda \in U_{\varepsilon_0}(\lambda_0)$ に対して，$\|K_\lambda\|<1$．したがって，C. ノイマンの定理（定理 1.34）によって，$1-K_\lambda$ は全単射であり，$(1-K_\lambda)^{-1} \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ かつ

$$(1-K_\lambda)^{-1}=\sum_{n=0}^\infty K_\lambda^n=\sum_{n=0}^\infty R_{\lambda_0}(A)^n(\lambda-\lambda_0)^n \tag{2.41}$$

が成り立つ．この事実と $A-\lambda_0$ の全単射性および (2.40) により，$A-\lambda$ も全単射であることがわかる．ゆえに，$\lambda \in U_{\varepsilon_0}(\lambda_0)$ ならば，$\lambda \in \varrho(A)$ が示されたので，(2.38) が成立する．(2.40) から，$\lambda \in U_{\varepsilon_0}(\lambda_0)$ ならば，$R_\lambda(A) = (1-K_\lambda)^{-1}R_{\lambda_0}(A)$ となるので，これと (2.41) により，(2.39) を得る．(2.38) は，$\varrho(A)$ の任意の点に対して，その適当な近傍をとれば，それが $\varrho(A)$ に含まれることを示す．したがって，$\varrho(A)$ は開集合である．　□

A を H 上の演算子とする．任意の $\lambda, \mu \in \varrho(A)$ に対して，

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = R_\lambda(A)[(A-\mu)-(A-\lambda)]R_\mu(A)$$

であるから，

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = (\lambda-\mu)R_\lambda(A)R_\mu(A) \tag{2.42}$$

が成り立つ．これを**第 1 レゾルヴェント公式**という．

$\lambda \neq \mu$ の場合，(2.42) は

$$\frac{R_\lambda(A) - R_\mu(A)}{\lambda-\mu} = R_\lambda(A)R_\mu(A) \tag{2.43}$$

と同値であるが，この左辺は，λ と μ の入れ替えで不変であるので

$$R_\lambda(A)R_\mu(A) = R_\mu(A)R_\lambda(A) \tag{2.44}$$

が得られる．したがって，$R_\lambda(A)$ と $R_\mu(A)$ は可換である．

2.2.3　スペクトルの基本的性質

定理 2.21　A をヒルベルト空間 H 上の可閉演算子とする．このとき，次の (i), (ii) が成立する．

(i)　$\sigma(A)$ は $\mathbb{C}$ の閉集合である．

(ii)　A が有界ならば，$\sigma(A) \neq \emptyset$ かつ

$$\sigma(A) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

証明 (i) これはレゾルヴェント集合 $\varrho(A)$ が開集合であること（定理 2.20 と (2.25)）による．

(ii) $|\lambda| > \|A\|$ をみたす任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ が $\varrho(A)$ に含まれることを示せば十分である．λ をそのようなものとすれば，$\|A/\lambda\| < 1$．したがって，ノイマンの定理により，$1 - (A/\lambda)$ は全単射であり，

$$\left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n$$

が成り立つ．したがって，$A - \lambda = -\lambda\left(1 - \frac{A}{\lambda}\right)$ は全単射であり

$$(A - \lambda)^{-1} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{A}{\lambda}\right)^n \tag{2.45}$$

となる．ゆえに $\lambda \in \varrho(A)$ である．

$\sigma(A) \neq \emptyset$ を示すために，仮に $\sigma(A) = \emptyset$ としよう．このとき，$\varrho(A) = \mathbb{C}$ である．そこで，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$\mathbb{C}$ 上の関数 $f(\lambda)$ を $f(\lambda) = \langle \Psi, R_\lambda(A)\Phi \rangle$, $\lambda \in \mathbb{C}$, によって定義する．このとき，定理 2.20 によって，任意の $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ に対して，

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \Psi, R_{\lambda_0}(A)^{n+1}\Phi \rangle (\lambda - \lambda_0)^n, \quad \lambda \in U_{\|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1}}(\lambda_0),$$

であるから，f は $\mathbb{C}$ 上で正則である．(2.45) から，$|\lambda| > \|A\|$ ならば，$\|R_\lambda(A)\| \leq 1/(|\lambda| - \|A\|)$．したがって，$\lambda \to \infty$ とすれば，$\|R_\lambda(A)\| \to 0$．これと $|f(\lambda)| \leq \|R_\lambda(A)\| \, \|\Psi\| \, \|\Phi\|$ によって，$f(\lambda)$ は有界な関数であり，$f(\lambda) \to 0$ $(\lambda \to \infty)$．したがって，複素変数関数論におけるリューヴィル (Liouville) の定理によって，$f(\lambda) = 0$ (定数) である．これは，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して成り立つから，$R_\lambda(A) = 0$．だが，これは矛盾である． □

非有界な演算子のスペクトルは，空集合や $\mathbb{C}$ 全体になる場合があることを注意しておこう（章末演習問題 1, 2 を参照）．

ユニタリ演算子のスペクトルについては次の定理が成り立つ：

定理 2.22 U をヒルベルト空間 H 上のユニタリ演算子とする．このとき，

$$\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} | \ |\lambda| = 1\}.$$

証明 $\|U\| = 1$ であるから，定理 2.21(ii) により，

$$\sigma(U) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} |\ |\lambda| \leq 1\}$$

である．したがって，$0 \leq |\lambda| < 1$ ならば，$\lambda \in \varrho(U)$ を示せばよい．いまの場合，$\|\lambda U^{-1}\| < 1$．したがって，ノイマンの定理によって，$1 - \lambda U^{-1}$ は全単射である．これと $U - \lambda = U\left(1 - \lambda U^{-1}\right)$ に注意すれば，$U - \lambda$ も全単射であることがわかる．したがって，$\lambda \in \varrho(U)$． □

上の定理を言葉で言い換えれば，ユニタリ演算子のスペクトルは複素平面上の単位円周に含まれる，ということである．もちろん，それが，単位円周のどのような閉集合になるかは，個々のユニタリ演算子に依存する．

有限次元ヒルベルト空間上の演算子のスペクトル特性については次の定理が成立する．

定理 2.23 H が有限次元ヒルベルト空間ならば，H 全体を定義域とする，H 上の任意の線形演算子のスペクトルは固有値のみからなる．

証明 A を H 上の線形演算子で D$(A) =$ H をみたすとする．命題 2.3 の証明のすぐあとの注意によって，$A - \lambda\, (\lambda \in \mathbb{C})$ が単射ならば，それは実は全射である．したがって，$\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ ならば，$\lambda \in \varrho(A)$（$A - \lambda$ は閉演算子であることに注意して，命題 2.19 を応用）．ゆえに，$\sigma(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A)$． □

2.2.4 演算子のユニタリ変換とスペクトルのユニタリ不変性

すでに定義したように，ユニタリ変換で結ばれるヒルベルト空間は同型であり，同じものとみなされる．このような場合，演算子の対応がどのようになるかを調べておくことは重要である．H, K をヒルベルト空間とし，A を H 上の演算子，U を H から K へのユニタリ演算子としよう．このとき，A に対応して，K 上の演算子

$$A_U := UAU^{-1} \tag{2.46}$$

が定義される．これを U による A の**ユニタリ変換**という．演算子の積の定義によって，

$$\mathsf{D}(A_U) = \{\Phi \in \mathsf{K} | U^{-1}\Phi \in \mathsf{D}(A)\} \tag{2.47}$$

であることに注意しよう．

命題 2.24 H 上の任意の演算子 A に対して，

$$\sigma(A_U) = \sigma(A), \tag{2.48}$$

$$\sigma_{\#}(A_U) = \sigma_{\#}(A), \tag{2.49}$$

が成り立つ．ここで，$\# = \mathrm{p}$, c, r であり，$\# = \mathrm{p}$ の場合，A の固有値 λ の多重度と A_U の固有値としての λ の多重度は等しい．

証明 A_U のスペクトルの性質を見るには，等式

$$A_U - \lambda = U(A-\lambda)U^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

に注意すればよい．実際，この等式と U の全単射性を用いれば，λ に関する $A-\lambda$ の写像特性と $A_U - \lambda$ の写像特性は同じになることがわかる．これから，スペクトルに関する主張 (2.48), (2.49) がしたがう． □

命題 2.25 演算子 A が（可）閉ならば，A_U は（可）閉演算子である．

証明 A が閉である場合のみについて証明する．A が可閉の場合も同様．$\Psi_n \in \mathsf{D}(A_U)$ が $\Psi_n \to \Psi \in \mathsf{K}$, $A_U\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{K}$, $(n \to \infty)$ をみたすとしよう．このとき，$U^{-1}\Psi_n \to U^{-1}\Psi$, $AU^{-1}\Psi_n \to U^{-1}\Phi$ $(n \to \infty)$．A は閉であるから，$U^{-1}\Psi \in \mathsf{D}(A)$ かつ $U^{-1}\Phi = AU^{-1}\Psi$．これは，$\Psi \in \mathsf{D}(A_U)$ かつ $\Phi = A_U\Psi$ を意味する．ゆえに A_U は閉である． □

一般に，演算子について，ユニタリ変換のもとで不変な性質あるいは量は**ユニタリ不変特性**あるいは**ユニタリ不変量**とよばれる．命題 2.24 はスペクトルの各部分集合 $\sigma_{\#}$ がユニタリ不変量であること，命題 2.25 は演算子の（可）閉性がユニタリ不変特性であることを示している．

ユニタリ変換はヒルベルト空間の抽象的構造を変えない．これと対応して，演算子のユニタリ変換は，演算子の具体的・外的な表示を変えうるだけであって，その本質を変えるものではない．つまり，互いにユニタリ変換でうつりあう演算子は本質的に同じものとみなされる．そこで次の定義を設ける：二つの演算子 A, B に対して，ユニタリ変換 U があって，演算子の等式 $B = UAU^{-1}$ が成立するとき，A と B は**ユニタリ同値**であるという．

演算子の普遍的な性質はユニタリ不変特性やユニタリ不変量によって表わされる．

2.2.5 かけ算演算子のスペクトル

スペクトルの基本的に重要な例として，一般のかけ算演算子のスペクトルを求めてみよう．F を σ 有限な測度空間 (X, μ) 上の可測関数で μ-a.e. 有限であるものとする．複素数 λ がすべての $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\mu\{x \in \mathsf{X} | |F(x) - \lambda| < \varepsilon\} > 0$$

をみたすならば，λ は F の**本質的値域** (essential range) にあるという．F の本質的値域を $\text{ess.ran}(F)$ で表わす．$\text{ess.ran}(F)$ は閉集合である．これは，次のようにしてわかる．各 $\varepsilon > 0$ に対し，

$$D_{\varepsilon,\lambda} = \{x \in \mathsf{X} | |F(x) - \lambda| < \varepsilon\}$$

とおく．$\lambda_n \in \text{ess.ran}(F)$, $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ $(n \to \infty)$ とする．このとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，番号 N が存在し，$n \geq N$ ならば $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon/2$ が成り立つ．したがって，$n \geq N$ で $x \in D_{\varepsilon/2,\lambda_n}$ ならば，$x \in D_{\varepsilon,\lambda}$ であることがわかる．すなわち，$D_{\varepsilon/2,\lambda_n} \subset D_{\varepsilon,\lambda}$,　$n \geq N$. $\mu(D_{\varepsilon/2,\lambda_n}) > 0$ であるから，$\mu(D_{\varepsilon,\lambda}) > 0$ を得る．したがって，$\lambda \in \text{ess.ran}(F)$.

本質的値域の具体例のひとつは次の命題であたえられる．

命題 2.26　$(\mathsf{X}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mu_L^d)$（$\mu_L^d$ は $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度），F が $\mathbb{R}^d$ 上の複素数値連続関数であれば，

$$\text{ess.ran}(F) = \overline{F(\mathbb{R}^d)}. \tag{2.50}$$

ここで，右辺は，F の像

$$F(\mathbb{R}^d) := \{F(x)|x \in \mathbb{R}^d\}$$

の $\mathbb{C}$ における閉包を表わす.

証明 まず，$\lambda \in F(\mathbb{R}^d)$ としよう．したがって，$\lambda = F(x_0)$ となる $x_0 \in \mathbb{R}^d$ がある．F の連続性によって，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある $\delta > 0$ が存在し，$|x - x_0| < \delta$ ならば，$|\lambda - F(x)| = |F(x_0) - F(x)| < \varepsilon$ が成り立つ．これは，$\{x \in \mathbb{R}^d||x - x_0| < \delta\} \subset D_{\varepsilon,\lambda}$ を意味し，したがって，$|D_{\varepsilon,\lambda}| \geq |\{x \in \mathbb{R}^d|\,|x| < \delta\}| > 0$. ただし，$|S|$ は集合 $S \subset \mathbb{R}^d$ のルベーグ測度を表わす．$\varepsilon > 0$ は任意であったから，$\lambda \in \mathrm{ess.ran}(F)$. よって，$F(\mathbb{R}^d) \subset \mathrm{ess.ran}(F)$. 上に示したように，$\mathrm{ess.ran}(F)$ は閉集合であったから，この両辺の閉包をとることにより $\overline{F(\mathbb{R}^d)} \subset \mathrm{ess.ran}(F)$.

逆に，$\lambda \in \mathrm{ess.ran}(F)$ とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$|D_{\varepsilon,\lambda}| > 0$ である．F の連続性により，$D_{\varepsilon,\lambda}$ は $\mathbb{R}^d$ の開集合である．したがって，各自然数 $n \geq 1$ に対し，$x_n \in \mathbb{R}^d$ と $\delta_n > 0$ が存在して，$\{x \in \mathbb{R}^d||x - x_n| < \delta_n\} \subset D_{1/n,\lambda}$. これは，$|\lambda - F(x_n)| < 1/n$ を意味するから，$F(x_n) \to \lambda$ $(n \to \infty)$. したがって，$\lambda \in \overline{F(\mathbb{R}^d)}$. ゆえに，$\mathrm{ess.ran}(F) \subset \overline{F(\mathbb{R}^d)}$. 以上から，(2.50) がしたがう. □

複素数 λ に対して，

$$F^{-1}(\{\lambda\}) := \{x \in \mathsf{X}|\ F(x) = \lambda\}$$

を F に関する，レヴェル λ の**レヴェル集合** (level set) という．かけ算演算子 M_F のスペクトルについては次の定理が成立する:

定理 2.27 F を (X, μ) 上の可測関数で μ-a.e. 有限であるものとする．このとき，

(i)

$$\sigma(M_F) = \mathrm{ess.ran}(F). \tag{2.51}$$

(ii) 複素数λがM_Fの固有値であるための必要十分条件は，$\mu\left(F^{-1}(\{\lambda\})\right) > 0$ となっていることである．この場合，固有値λに属する固有空間$\ker(M_F - \lambda)$について，

$$\ker(M_F - \lambda) = \{f \in \mathsf{D}(M_F) | \operatorname{supp} f \subset F^{-1}(\{\lambda\})\} \quad (2.52)$$

が成り立つ．

(iii) すべての$\lambda \in \mathbb{C}$に対して，$\mu\left(F^{-1}(\{\lambda\})\right) = 0$ならば，$\sigma_{\mathrm{p}}(M_F) = \emptyset$.

証明 (i) (2.51) を示すには，

$$\varrho(M_F) = (\mathrm{ess.ran}(F))^c \quad (2.53)$$

を証明すればよい．まず，$\lambda \in \varrho(M_F)$とすれば，定数$C > 0$が存在して，

$$\int_{\mathsf{X}} \frac{|f(x)|^2}{|F(x)-\lambda|^2} d\mu(x) \le C\|f\|^2, \quad f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu).$$

もし，$\mu(D_{\varepsilon,\lambda}) > 0$ならば，十分おおきな$n$に対して$0 < \mu(D_{\varepsilon,\lambda} \cap \mathsf{X}_n) \le \mu(\mathsf{X}_n) < \infty$（$\mathsf{X}_n$は，$\mathsf{X} = \cup_{n=1}^{\infty}$，$\mathsf{X}_n \subset \mathsf{X}_{n+1}$，$\mu(X_n) < \infty$，$n \ge 1$をみたす集合；例 1.33 を参照）．上の不等式でfとして，$D_{\varepsilon,\lambda} \cap \mathsf{X}_n$の定義関数をとれば，$\mu(D_{\varepsilon,\lambda} \cap \mathsf{X}_n)/\varepsilon^2 \le C\mu(D_{\varepsilon,\lambda} \cap \mathsf{X}_n)$．すなわち，$1/\varepsilon^2 \le C$．これは，すべての$\varepsilon > 0$に対しては成り立ち得ないので，ある$\varepsilon_0 > 0$が存在して，$\mu(D_{\varepsilon_0,\lambda}) = 0$となる．したがって，$\lambda \notin \mathrm{ess.ran}(F)$．ゆえに，$\varrho(M_F) \subset (\mathrm{ess.ran}(F))^c$.

次に，$\lambda \in (\mathrm{ess.ran}(F))^c$としよう．このとき，ある$\varepsilon_0 > 0$が存在して，$\mu(D_{\varepsilon_0,\lambda}) = 0$となる．そこで，関数$g$を

$$g(x) = \begin{cases} f(x)/(F(x)-\lambda) & ; x \notin D_{\varepsilon_0,\lambda} \text{ のとき} \\ 0 & ; x \in D_{\varepsilon_0,\lambda} \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義する．このとき，すべての$f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$に対して，

$$\int_{\mathsf{X}} |g(x)|^2 d\mu(x) = \int_{\mathsf{X} \setminus D_{\varepsilon_0,\lambda}} \frac{|f(x)|^2}{|F(x)-\lambda|^2} d\mu(x) \le \frac{\|f\|^2}{\varepsilon_0^2}.$$

したがって，$g \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ であり，対応 $G : f \to g$ は $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ 上の有界演算子をあたえる．さらに，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ における等式として，

$$G(M_F - \lambda)f \;=\; f, \quad f \in \mathsf{D}(M_F),$$
$$(M_F - \lambda)Gf \;=\; f, \quad f \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$$

が成立することも容易にわかる（$D_{\varepsilon_0,\lambda}$ の μ 測度は 0 であることに注意）．これは，$M_F - \lambda$ が 1 対 1, 上への写像であり，$G = (M_F - \lambda)^{-1}$ であることを意味するから $\lambda \in \varrho(M_F)$ が結論される．以上から，(2.53) が証明されたことになる．

(ii) （必要性）$\lambda \in \sigma_{\rm p}(M_F)$ とし，これに属する固有ベクトルのひとつを f とすれば，$f \in \mathsf{D}(M_F)$, $f \neq 0$, であり，測度 μ に関する零集合 N が存在して，$F(x)f(x) = \lambda f(x)$, $x \in \mathsf{X}\backslash N$. したがって，すべての $x \in (\mathsf{X}\backslash N) \cap [F^{-1}(\{\lambda\})]^c$ に対して，$f(x) = 0$. これは，$\operatorname{supp} f \subset N \cup F^{-1}(\{\lambda\})$ を意味する．もし，$F^{-1}(\{\lambda\})$ が零集合であるとすると，$\operatorname{supp} f$ は零集合になるので，$f(x) = 0$, μ-a.e.x. これは，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ の元として $f = 0$ を意味する．だが，これは矛盾である．したがって，$\mu(F^{-1}(\{\lambda\})) > 0$.

（十分性）$\mu(F^{-1}(\{\lambda\})) > 0 \cdots (*)$ とする．$\mathsf{Y}_n = F^{-1}(\{\lambda\}) \cap \mathsf{X}_n$ とおく．仮定 $(*)$ により，ある番号 n_0 があって，$\mu(\mathsf{Y}_{n_0}) > 0$（もし，任意の n に対して，$\mu(Y_n) = 0$ であるとすると，$\mu(F^{-1}(\{\lambda\})) = \mu(\mathsf{X} \cap F^{-1}(\{\lambda\})) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathsf{Y}_n) = 0$ となり，$(*)$ に反する）．$0 < \mu(\mathsf{Y}_{n_0}) \leq \mu(\mathsf{X}_{n_0}) < \infty$ であるから，Y_{n_0} の定義関数を χ とすれば，$\chi \in \mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$, $\chi \neq 0$ が成り立つ．また，$F(x)\chi(x) = \lambda\chi(x)$, $x \in \mathsf{X}$ であるから，$\chi \in \mathsf{D}(M_F)$，かつ $M_F\chi = \lambda\chi$ が導かれる．したがって，$\lambda \in \sigma_{\rm p}(M_F)$.

(2.52) の右辺の集合を M とすると，$\mathsf{M} \subset \ker(M_F - \lambda)$ は容易にわかる．逆に，$f \in \ker(M_F - \lambda)$ とすれば，$f \in \mathsf{D}(M_F)$ であり，測度 μ に関する零集合 N が存在して，$F(x)f(x) = \lambda f(x)$, $x \in \mathsf{X} \setminus N$. したがって，すべての $x \in (\mathsf{X} \setminus N) \cap [F^{-1}(\{\lambda\})]^c$ に対して，$f(x) = 0$. これは，$\operatorname{supp} f \subset N \cup F^{-1}(\{\lambda\})$ を意味する．N は零集合であるから，f は，その台が $F^{-1}(\{\lambda\})$ に含まれる 2 乗可積分関数と同値である．したがって，$\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ の元としては，$\operatorname{supp} f \subset F^{-1}(\{\lambda\})$ としてよい．したがって，$f \in \mathsf{M}$. 以上によって，(2.52)

が成り立つことが示された．

(iii) これは (ii) の単純な応用である．　□

命題 2.26 と定理 2.27 から次の結果を得る．

定理 2.28　F を $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数とし，M_F を $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の，関数 F によるかけ算演算子とする．このとき，

(i)

$$\sigma(M_F) = \overline{F(\mathbb{R}^d)}.$$

(ii) 複素数 λ が M_F の固有値であるための必要十分条件は，$\left|F^{-1}(\{\lambda\})\right| > 0$ となっていることである．この場合，固有値 λ に属する固有空間 $\ker(M_F - \lambda)$ について，

$$\ker(M_F - \lambda) = \{f \in \mathsf{D}(M_F) | \operatorname{supp} f \subset F^{-1}(\{\lambda\})\}$$

が成り立つ．

(iii) すべての $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$\left|F^{-1}(\{\lambda\})\right| = 0$ ならば，$\sigma_{\mathrm{p}}(M_F) = \emptyset$.

例 2.9　(i) $(\mathsf{X}, \mu) = (\mathbb{R}, \mu_L^1)$，$F(x) = x^n$，$n \geq 1, x \in \mathbb{R}$ の場合を考える．このとき

$$\sigma(M_F) = \begin{cases} \mathbb{R} & ; n \text{ が奇数のとき} \\ [0, \infty) & ; n \text{ が偶数のとき} \end{cases}$$

となることがわかる．この場合，M_F は固有値をもたないこと，すなわち，$\sigma_{\mathrm{p}}(M_F) = \emptyset$ も容易にわかる．

(ii) $(\mathsf{X}, \mu) = (\mathbb{R}^2, \mu_L^2)$，$F(x) = x_1 + ix_2$，$x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ の場合，$F(\mathbb{R}^2) = \mathbb{C}$ であるから，

$$\sigma(M_F) = \mathbb{C}.$$

また，$\sigma_{\mathrm{p}}(M_F) = \emptyset$ も容易に示される．

2.3　対称演算子と自己共役演算子

この節では，量子力学への応用において，特別に重要な役割を演じる演算子のクラスを定義し，基本的な性質を調べる．

2.3.1　対 称 演 算 子

線形代数学において重要な位置を占めるエルミート行列のヒルベルト空間版をまず定義する．H をヒルベルト空間，A を H 上の演算子とする．すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，

$$\langle \Psi, A\Phi \rangle = \langle A\Psi, \Phi \rangle \tag{2.54}$$

が成り立つとき，A は**エルミート**であるという．性質 (2.54) を A の**エルミート性**という．

エルミート演算子 A の定義域が稠密であるとき，A を**対称演算子** (symmetric operator) とよぶ．

本によっては，エルミート演算子と対称演算子を同義に用いている場合もある．本書では，エルミート演算子と対称演算子を区別する．したがって，対称演算子の全体は，エルミート演算子の全体の部分集合をなす．

A が対称演算子ならば，その共役演算子 A^* が存在する．(2.54) は，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*)$ かつ $A^*\Psi = A\Psi$ を意味する．したがって，$A \subset A^*$．すなわち，A^* は A の拡大である．

逆に，H 上の演算子 A が稠密に定義されていて，$A \subset A^*$ が成り立つならば，すべての $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，(2.54) が成り立つ．したがって，A は対称である．

こうして，次の命題を得る．

命題 2.29　演算子 A が対称であるための必要十分条件は，$\mathsf{D}(A)$ が稠密であり，かつ $A \subset A^*$ が成り立つことである．

例 2.10　∂_j^n を 1 章の例 1.25 の偏微分演算子とし，$A_n = (-i)^n \partial_j^n$ とおく．定義によって，$\mathsf{D}(A_n) = \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であるから，A_n は稠密に定義されている．容易

にわかるように，$A_n^* = i^n(\partial_j^n)^*$．これと例 2.4 の結果，$A_n^* \supset (-i)^n\partial_j^n = A_n$．ゆえに，$A_n$ は $\mathsf{L}^2(\mathbf{R}^d)$ 上の対称演算子である．

(2.54) から，A がエルミートならば，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\langle\Psi, A\Psi\rangle$ は実数である．実はこの逆も成り立つ：

命題 2.30　A を H 上の演算子とする．このとき，A がエルミートであるための必要十分条件は任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\langle\Psi, A\Psi\rangle$ が実数となることである．

証明　必要性はすでに見た．十分性を示そう．これは次の恒等式に注目することによってなされる：

$$\begin{aligned}\langle\Psi, A\Phi\rangle = \frac{1}{4}\Big\{&\langle\Psi+\Phi, A(\Psi+\Phi)\rangle - \langle\Psi-\Phi, A(\Psi-\Phi)\rangle \\ &+i\langle\Psi-i\Phi, A(\Psi-i\Phi)\rangle - i\langle\Psi+i\Phi, A(\Psi+i\Phi)\rangle\Big\}, \\ &\qquad\qquad \Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A).\end{aligned} \tag{2.55}$$

これを (演算子 A に関する) **偏極恒等式** (polarization identity) という[*7]．十分性の仮定により，$\langle\Psi \pm \Phi, A(\Psi \pm \Phi)\rangle, \langle\Psi \pm i\Phi, A(\Psi \pm i\Phi)\rangle$ は実数である．したがって，(2.55) の複素共役を考えることにより，$\langle\Psi, A\Phi\rangle^* = \langle\Phi, A\Psi\rangle$ が得られる．この式の左辺は $\langle A\Phi, \Psi\rangle$ に等しいから，A はエルミートである．　□

命題 2.31　A を H 上の対称演算子とする．このとき，A は可閉であり，その閉包 $\bar{A}$ も対称演算子である．

証明　A は対称演算子であるから，$\mathsf{D}(A) \subset \mathsf{D}(A^*)$．したがって，$\mathsf{D}(A^*)$ は稠密である．ゆえに，命題 2.13(i) によって，A は可閉であり，$\bar{A} = A^{**}$ が成り立つ．一方，命題 2.29 によって，$A \subset A^*$ であるから，(2.5) および命題 2.13(ii) によって，$A^{**} \subset A^* = (\bar{A})^*$．したがって，$\bar{A} \subset (\bar{A})^*$．ゆえに，命題 2.29 によって，$\bar{A}$ は対称演算子である．　□

演算子 A が対称であり，かつ閉であるとき，A を**閉対称演算子**であるという．命題 2.31 によって，**対称演算子はつねに閉対称演算子に拡大できる．**

---

*7　$A = I$ の場合，単に**偏極恒等式**とよばれる（第 1 章演習問題 1 を参照）．

A をエルミート演算子としよう．このとき，命題 2.30 によって，集合

$$\mathsf{N}(A) := \{\langle \Psi, A\Psi \rangle \,|\, \Psi \in \mathsf{D}(A),\ \|\Psi\| = 1\} \tag{2.56}$$

は $\mathbb{R}$ の部分集合である．これを A の**数域** (numerical range) という．この集合が下界をもつとき，すなわち，ある定数 $\gamma \in \mathbf{R}$ が存在し，$\inf \mathsf{N}(A) \geq \gamma$ が成り立つとき，A は**下に有界** (bounded below) であるという．このことを記号的に

$$A \geq \gamma \tag{2.57}$$

と書く．特に $\gamma = 0$ $(\gamma > 0)$ の場合，A は**非負** (non-negative) [**正** (positive)] であるという．

また，定数 $\gamma' \in \mathbf{R}$ が存在し，$\sup \mathsf{N}(A) \leq \gamma'$ が成り立つとき，A は**上に有界** (bounded above) であるといい，このことを記号的に

$$A \leq \gamma' \tag{2.58}$$

と表わす．

容易にわかるように，エルミート演算子 A が下に有界であることは，実定数 γ が存在して，不等式

$$\langle \Psi, A\Psi \rangle \geq \gamma \|\Psi\|^2, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A), \tag{2.59}$$

が成り立つことと同値である．

同様に，エルミート演算子 A が上に有界であることは，実定数 γ' が存在して，不等式

$$\langle \Psi, A\Psi \rangle \leq \gamma' \|\Psi\|^2, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A), \tag{2.60}$$

が成り立つことと同値である．

例 2.11　例 2.10 で n が偶数の場合，すなわち，$n = 2k$ $(k \geq 1)$ の場合を考えると，任意の $f \in \mathsf{D}(A_{2k}) = \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，例 2.4 の事実を使えば，

$$\langle f, A_{2k} f \rangle = (-1)^k \langle f, \partial_j^{2k} f \rangle = \langle \partial_j^k f, \partial_j^k f \rangle \geq 0.$$

したがって，A_{2k} は非負対称演算子である．すなわち，$A_{2k} \geq 0$.

エルミート演算子に関する次の定理は量子力学の数理を考察するうえで心に留めて置くべき重要な事実である．

定理 2.32　Hellinger-Toeplitz の定理． A を H 上のエルミート演算子とし，$\mathsf{D}(A) = \mathsf{H}$ であるとする．このとき，A は有界である．

証明　仮定のもとで，A が閉であることを示せばよい．このとき，閉グラフ定理（定理 2.14）によって結論が得られる．A が閉であることを示すには，そのグラフ $\mathsf{G}(A)$ が $\mathsf{H} \bigoplus \mathsf{H}$ の閉集合であることを示せばよい（命題 2.6）．そこで，$\mathsf{G}(A) \ni (\Psi_n,\ A\Psi_n) \to (\Psi, \Phi) \in \mathsf{H} \bigoplus \mathsf{H}\ (n \to \infty)$ とする．このとき，任意の $\Xi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle \Xi, \Phi \rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \Xi, A\Psi_n \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle A\Xi, \Psi_n \rangle \\ &= \langle A\Xi, \Psi \rangle = \langle \Xi, A\Psi \rangle.\end{aligned}$$

したがって，$\Phi = A\Psi$．ゆえに，$(\Psi, \Phi) \in \mathsf{G}(A)$ であるから，$\mathsf{G}(A)$ は閉である． □

定理 2.32 から，非有界なエルミート演算子の定義域はヒルベルト空間全体になり得ないことが結論される．このことが，実は，量子力学における数学的に厳密な考察に関わる種々の技術的困難の一因をつくることになる．というのは，3 章以降で詳しく述べるが，量子力学の諸々の具体的なモデルにおける物理量は，多くの場合，非有界な対称演算子の，自己共役拡大とよばれるある種の拡大として定義されるからである．非有界な対称演算子について，エルミート性を保持しつつ，その拡大を考察する場合，定理 2.32 は，そのような任意の拡大の定義域はヒルベルト空間全体ではあり得ないことを教える．ところで，一般的に言って，演算子の拡大の存在がわかったとしても，その拡大の定義域をきっちりととらえるのは難しい．しかし，定義域が明確につかめていないと，その演算子の性質（たとえば，スペクトル）を詳しく調べるのに困難が生じるのである．

エルミート演算子の固有値と固有ベクトルは，次の命題に述べるように，特別な性質をもっている．

命題 2.33　演算子 A を H 上のエルミート演算子とする．このとき，次の (i), (ii) が成り立つ．

(i)　A の固有値はすべて実数である: $\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \mathbf{R}$.

(ii)　A の相異なる固有値に属する固有ベクトルは直交する．すなわち，$\lambda, \mu \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$ を A の相異なる固有値，それらに属する固有ベクトルを，それぞれ，Ψ_λ, Ψ_μ とすれば，$\langle \Psi_\lambda, \Psi_\mu \rangle = 0$.

証明　(i) $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A)$, Ψ_λ を対応する，規格化された固有ベクトルとすれば，$\lambda = \langle \Psi_\lambda, A\Psi_\lambda \rangle = \langle A\Psi_\lambda, \Psi_\lambda \rangle = \lambda^*$. したがって，$\lambda$ は実数である．

(ii) $\lambda, \mu, \Psi_\lambda, \Psi_\mu$ を上のものとすれば，

$$\lambda \langle \Psi_\lambda, \Psi_\mu \rangle = \langle A\Psi_\lambda, \Psi_\mu \rangle = \langle \Psi_\lambda, A\Psi_\mu \rangle = \mu \langle \Psi_\lambda, \Psi_\mu \rangle.$$

したがって，$(\lambda - \mu)\langle \Psi_\lambda, \Psi_\mu \rangle = 0$. ゆえに求める結果を得る．　□

2.3.2　自己共役演算子

対称演算子のうちで重要なクラスが存在する．稠密に定義された，H 上の演算子 A が $A = A^*$ をみたすとき，A は**自己共役** (self-adjoint) であるといい，このような演算子を**自己共役演算子**という．

共役演算子は閉であったから，自己共役演算子は自動的に閉である．

ヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への任意の有界演算子 B に対して，B^*B は H 上の有界な自己共役演算子である．したがって，有界な自己共役演算子は "十分たくさん" 存在する．

自己共役演算子は，後にみるように（3 章以降を参照），量子物理学ではとりわけ重要な役割を演ずる演算子である．

ここで，次の点を注意しておこう．対称演算子が有界ならば，それは自動的に自己共役である．だが，非有界な対称演算子は必ずしも自己共役とは限らない，ということである．通常の物理学の論文や教科書では，多くの場合，エルミート演算子と対称演算子と自己共役演算子の区別は厳密にはなされていない．場合によっては，これらの概念が同義で用いられていることさえ見られる．もっとも，そのような文献の内容の記述の仕方は発見法的であるので，そうした区別

は必要ないともいえるし，物理学としては，ほとんどの場合，それでたりてしまうのである．しかし，量子力学の数学的本質を厳密で明晰な形で認識し，数学的に疑義のない理論を展開をするには，エルミート演算子と対称演算子と自己共役演算子をきちんと区別してかかることは不可欠である．たとえば，後に見るように，スペクトル定理—有限次元エルミート行列の対角化（スペクトル分解）の（無限次元の場合も含んだ形での）一般化—が成り立つのは自己共役演算子の場合であり，量子力学系の対称性（時間発展，空間並進，空間回転など）を表現するユニタリ群の生成子は自己共役でなければならないのである．

いま述べた注意を補う意味で，閉対称演算子であるが，自己共役ではない演算子の例をひとつあげておこう．

例 2.12 ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2([0,1])$ で次の演算子を考える：

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(\hat{p}_0) &:= \mathsf{C}_0^\infty(0,1), \\ (\hat{p}_0 f)(x) &:= -i\frac{df(x)}{dx}. \end{aligned}$$

演算子 $\hat{p}_0$ が対称であることは容易にわかる．$\hat{p}_0$ の閉包を $\hat{p}$ としよう．したがって，$\hat{p}$ は閉対称演算子である．関数 $u(x) := e^x$（の同値類）は $\mathsf{L}^2([0,1])$ の元であり，すべての $f \in \mathsf{D}(\hat{p}_0)$ に対して，部分積分により，$\langle u, \hat{p}_0 f\rangle = \langle -iu, f\rangle$．したがって，$u \in \mathsf{D}((\hat{p}_0)^*)$ かつ $(\hat{p}_0)^* u = -iu$．さて，仮に $\hat{p}$ が自己共役，すなわち，$\hat{p} = \hat{p}^*$ が成り立つとしてみよう．このとき，命題 2.13(ii) によって，$\hat{p}^* = (\hat{p}_0)^*$ であるから，$\hat{p} = (\hat{p}_0)^*$ となる．したがって，$\hat{p}u = -iu$． これは p が虚数の固有値をもつことを意味する．一方，自己共役演算子の固有値は実数に限られるから（命題 2.32(i)），これは矛盾である．したがって，$\hat{p}$ は自己共役ではない．

自己共役演算子の例もひとつ見ておく．

例 2.13 F を測度空間 (X, μ) 上の実数値可測関数で μ-a.e. 有限なものとする．このとき，例 2.2 の結果により，かけ算演算子 M_F は $\mathsf{L}^2(\mathsf{X}, d\mu)$ において自己共役である．さらに，実定数 γ があって，$F(x) \geq \gamma$, μ-a.e. x, ならば，$M_F \geq \gamma$ である．

実数値可測関数によるかけ算演算子は，量子力学に現われる自己共役演算子の基本的な例のひとつである．量子力学と関わる他の例については，本書で量子力学を展開する過程で議論していくことにする．以下では，自己共役演算子の基本的な一般的性質を調べておく．

対称演算子 A に対して，対称演算子 B があって，$A \subset B$ が成り立つとき，B を A の**対称拡大**という．B が自己共役であれば，B を A の**自己共役拡大**という．いずれの場合でも，$B \neq A$ のとき，拡大 B は非自明であるという．

自己共役演算子のひとつの特徴は，それが非自明な対称拡大をもたないことである：

命題 2.34　A を自己共役演算子，B を対称演算子とする．もし，$A \subset B$ であるならば，$A = B$ である．

証明　$A \subset B$ ならば $B^* \subset A^* = A$. 一方，B は対称であるから，$B \subset B^*$. したがって，$B^* \subset A \subset B \subset B^*$ という関係が成り立つ．これは，$B^* = A = B$ を意味する．　□

自己共役性という性質はユニタリ不変であることを証明するために，次の事実に注目する．

補題 2.35　U をヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K へのユニタリ変換，A を H 上の閉演算子とする．このとき，

(i)　UA は閉演算子である．

(ii)　$\mathsf{D}(A)$ が稠密のとき，演算子の等式

$$(A^*U^{-1})^* = UA$$

が成立する．

証明　(i) $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(UA) = \mathsf{D}(A)$, $\Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}$, $UA\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{K}$ $(n \to \infty)$ とする．このとき，$A\Psi_n \to U^{-1}\Phi$ $(n \to \infty)$．A は閉であるから，$\Psi \in \mathsf{D}(A) = \mathsf{D}(UA)$ かつ $A\Psi = U^{-1}\Phi$，すなわち，$UA\Psi = \Phi$. したがって，UA は閉である．

(ii) 命題 2.2(ii) によって，$(UA)^* = A^*U^* = A^*U^{-1}$ したがって，$(UA)^{**} = (A^*U^{-1})^*$．(i) により，左辺は UA に等しい（命題 2.13(i)）． □

次の定理は，自己共役性という性質がユニタリ不変特性であることを示す．

定理 2.36 U をヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K へのユニタリ変換，A を H 上の自己共役演算子とする．このとき，UAU^{-1} は K 上の自己共役演算子である．

証明 $B = UAU^{-1}$ とおけば，B が対称演算子であることは容易にわかる（$\mathsf{D}(B) = U\mathsf{D}(A)$ に注意）*8．命題 2.2(ii), (2.12) によって，$B^* = (AU^{-1})^*U^{-1}$．補題 2.35 を応用すれば，$(AU^{-1})^* = UA$．したがって，$B^* = B$． □

2.3.3 自己共役演算子のスペクトル

自己共役演算子のスペクトルの一般的性質を調べよう．そのための準備として補題を用意する．

補題 2.37 A をヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への閉演算子とする．このとき，次の (i),(ii) が成り立つ．

(i) A の核 $\ker A$ は H の閉部分空間である．

(ii) $\mathsf{D}(A)$ が稠密のとき，

$$\mathsf{H} = \ker A \bigoplus \overline{\mathsf{R}(A^*)}. \tag{2.61}$$

証明 (i) $\ker A$ が部分空間であることはすでに見たので（1 章 1.2 節），$\ker A$ の閉性を示せばよい．$\Psi_n \in \ker A$, $\Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}$ とする．このとき，$A\Psi_n = 0$ であるから，明らかに，$A\Psi_n \to 0$ $(n \to \infty)$． そこで，A が閉であることを使えば，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ かつ $A\Psi = 0$ を得る．したがって，$\Psi \in \ker A$. ゆえに $\ker A$ は閉集合である．

(ii) 任意の $\Psi \in \ker A, \Phi \in \mathsf{D}(A^*)$ に対して $0 = \langle A\Psi, \Phi\rangle = \langle \Psi, A^*\Phi\rangle$．したがって，$\ker A$ と $\mathsf{R}(A^*)$ は直交する．そこで，部分空間 $\mathsf{D} := \{\Psi + \Phi | \Psi \in$

*8 したがって，演算子が対称であるという性質もユニタリ不変である．

$\ker A, \Phi \in \mathsf{R}(A^*)\}$ を考え，これが H で稠密であることを示そう．$\chi \in \mathsf{D}^\perp$ とすれば，任意の $\Psi \in \ker A, \Phi \in \mathsf{R}(A^*)\}$ に対して $\langle \Psi + \Phi, \chi \rangle = 0$．特に，$\Phi = 0$ の場合を考えると $\chi \in (\ker A)^\perp$ がわかる．また，$\Psi = 0, \Phi = A^*\eta, \eta \in \mathsf{D}(A^*)$，の場合を考えれば，$\langle A^*\eta, \chi \rangle = 0 = \langle \eta, 0 \rangle$．これは，$\chi \in \mathsf{D}((A^*)^*) = \mathsf{D}(A)$, $A\chi = 0$ を意味する．したがって $\chi \in \ker A$．こうして $\chi \in \ker A \cap (\ker A)^\perp$ を得る．したがって，$\chi = 0$．よって，D は H で稠密である（命題 1.19(i)）．

次に

$$\bar{\mathsf{D}} = \ker A \bigoplus \overline{\mathsf{R}(A^*)} \tag{2.62}$$

を示そう．これができれば，前段の結果により，(2.61) が得られる．さて $\mathsf{D} \subset \ker A \oplus \overline{\mathsf{R}(A^*)}$ は明らかであるから，$\bar{\mathsf{D}} \subset \ker A \oplus \overline{\mathsf{R}(A^*)}$．したがって，これと逆の包含関係を示せばよい．$\Psi \in \ker A \oplus \overline{\mathsf{R}(A^*)}$ とすれば，$\Psi \in \ker A$, $\Phi \in \overline{\mathsf{R}(A^*)}$ が存在して，$\Psi = \Psi + \Phi$ と表わされる．$\Phi \in \overline{\mathsf{R}(A^*)}$ であるから，$\Phi_n \to \Phi\ (n \to \infty)$ となるベクトル列 $\{\Phi_n\}_n \subset \mathsf{R}(A^*)$ が存在する．そこで，$\Psi_n = \Psi + \Phi_n$ とおけば，$\Psi_n \in \mathsf{D}$ であって，$\|\Psi_n - \Psi\| = \|\Phi_n - \Phi\| \to 0\ (n \to \infty)$．したがって，$\Psi \in \bar{\mathsf{D}}$．ゆえに，$\bar{\mathsf{D}} \supset \ker A \oplus \overline{\mathsf{R}(A^*)}$．　□

(2.61) を**稠密に定義された閉作用素 A に関する，H の直交分解**とよぶ．この分解はヒルベルト空間上の解析において有用である．

補題 2.38　ヒルベルト空間 H からヒルベルト空間 K への閉演算子 B について，$\mathsf{R}(B)$ が閉であるための必要十分条件は，定数 $C > 0$ が存在して，

$$\|B\Psi\| \geq C\|\Psi\|, \quad \Psi \in \mathsf{D}(B) \cap (\ker B)^\perp, \tag{2.63}$$

が成立することである．

証明　（必要性）$\mathsf{R}(B)$ は閉であるとする．したがって，$\mathsf{R}(B)$ は K の内積に関してヒルベルト空間である．$B' = B \restriction \mathsf{D}(B) \cap (\ker B)^\perp$ とおくと，B' は $(\ker B)^\perp$ から $\mathsf{R}(B)$ への閉演算子であり，全単射である．したがって，閉グラフ定理（定理 2.15）によって，${B'}^{-1}$ は有界であるので，定数 $C > 0$ が存在して，$\|{B'}^{-1}\Phi\| \leq C^{-1}\|\Phi\|, \Phi \in \mathsf{R}(B)$．任意の $\Psi \in \mathsf{D}(B) \cap (\ker B)^\perp$ に対して，${B'}^{-1}\Phi = \Psi$ となる $\Phi \in \mathsf{R}(B)$ があるから，(2.63) を得る．

（十分性）$\Psi_n \in \mathsf{D}(B), B\Psi_n \to \Theta \in \mathsf{K}$, $(n \to \infty)$ とする．正射影定理によって，$\Psi_n = \Phi_n + \eta_n$ と分解できる．ただし，$\Phi_n \in (\ker B)^\perp, \eta_n \in \ker B$. したがって，$\Phi_n = \Psi_n - \eta_n \in \mathsf{D}(B)$ であり，$B\Phi_n = B\Psi_n$. ゆえに，$B\Phi_n \to \Theta$ $(n \to \infty)$. いまの仮定 (2.63) によって，$\{\Phi_n\}_n$ はコーシー列である．したがって，$\Phi_n \to \Phi$ $(n \to \infty)$ となる $\Phi \in \mathsf{H}$ が存在する．B は閉であるから，$\Phi \in \mathsf{D}(B)$ かつ $B\Phi = \Theta$. したがって，$\Theta \in \mathsf{R}(B)$. ゆえに，$\mathsf{R}(B)$ は閉である． □

補題 2.39　A をヒルベルト空間 H 上のエルミート演算子とする．このとき，次の (i)〜(iv) が成立する．

(i)　任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，

$$\|(A-z)\Psi\| \geq |\mathrm{Im}\, z|\,\|\Psi\|, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A). \tag{2.64}$$

(ii)　$A \geq 0$ ならば，任意の $c > 0$ に対して

$$\|(A+c)\Psi\| \geq c\|\Psi\|, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A). \tag{2.65}$$

(iii)　A が閉ならば，任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，$\mathsf{R}(A-z)$ は閉集合である．

(iv)　A が閉で非負ならば，任意の $c > 0$ に対して，$\mathsf{R}(A+c)$ は閉集合である．

証明　(i) $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}, \Psi \in \mathsf{D}(A)$, とすれば，$A$ のエルミート性により，

$$\|(A-z)\Psi\|^2 = \|(A-x)\Psi\|^2 + y^2\|\Psi\|^2 \geq y^2\|\Psi\|^2.$$

したがって，(2.64) が成立する．

(ii) 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\langle \Psi, A\Psi \rangle \geq 0$ であるから，

$$\|(A+c)\Psi\|^2 = \|A\Psi\|^2 + 2c\langle \Psi, A\Psi \rangle + c^2\|\Psi\|^2 \geq c^2\|\Psi\|^2.$$

したがって，(2.65) が得られる．

(iii) A がエルミートであれば，$\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \mathbb{R}$ であるから（命題 2.33），任意の $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ に対して，$\ker(A-z) = \{0\}$. この事実と (2.64) によって，補題 2.38 を演算子 $B = A - z$ として応用できる．したがって，$\mathsf{R}(A-z)$ は閉である．

(iv) (iii) と同様． □

注意 補題 2.39 の (iii), (iv) は，補題 2.38 を使わずに，直接，それぞれ，(2.64), (2.65) を用いて，$\mathsf{R}(A-z), \mathsf{R}(A+c)$ が閉であることを示すことによっても証明される．

自己共役演算子のスペクトルの一般的性質は次の定理にまとめられる．

定理 2.40 A を自己共役演算子とするとき，次の (i)～(iv) が成り立つ：

(i) $\sigma(A)$ は $\mathbb{R}$ の閉部分集合である．

(ii) 実定数 γ があって，$A \geq \gamma$ ならば，$\sigma(A) \subset [\gamma, \infty)$．

(iii) A は剰余スペクトルをもたない：$\sigma_{\mathrm{r}}(A) = \emptyset$

(iv) $\lambda \in \sigma(A)$ であるための必要十分条件は，

$$\|\Psi_n\| = 1,\ n = 1, 2, 3, \cdots, \quad \lim_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\Psi_n\| = 0$$

をみたす点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{D}(A)$ が存在することである．

証明 (i) $\sigma(A)$ が閉集合であることは，定理 2.21(i) による．したがって，$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ を示せばよい．これは，

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \subset \varrho(A) \tag{2.66}$$

と同値である．そこで，こちらの方を証明しよう．$z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ とする．補題 2.39(i) によって，$A - z$ は単射であり，$(A-z)^{-1}$ は有界である．補題 2.37(ii) の A として，$A - z^*$ を考えると，$\ker(A-z^*) = \{0\}$ であるから，$\mathsf{H} = \overline{\mathsf{R}((A-z^*)^*)}$．一方，$A$ は自己共役であるから，$(A-z^*)^* = A - z$[命題 2.2(i), (2.10)]．したがって，$\mathsf{H} = \overline{\mathsf{R}(A-z)}$．これは，$\mathsf{R}(A-z)$ が稠密であることを示す．ゆえに，$z \in \varrho(A)$．よって，(2.66) が成立する．

(ii) これを示すには，(i) によって，

$$(-\infty, \gamma) \subset \varrho(A) \tag{2.67}$$

を示せばよい．$t \in (-\infty, \gamma)$ としよう．$B := A - \gamma$ は非負の自己共役演算子であるから，任意の $c > 0$ に対して，補題 2.39(ii) より，$B + c$ は単射で $(B+c)^{-1}$ は有界である．補題 2.37(ii) によって，$\mathsf{H} = \ker(B+c) \bigoplus \overline{\mathsf{R}((B+c)^*)}$．いまの場合，$\ker(B+c) = \{0\}$ で $(B+c)^* = B + c$ [命題 2.2(i), (2.10)] であるか

ら，$\mathsf{H} = \overline{\mathsf{R}(B+c)}$．したがって，$\mathsf{R}(B+c) = \mathsf{R}(A-(\gamma-c))$ は稠密．ゆえに，$\gamma - c \in \varrho(A)$．$c > 0$ は任意であったから，(2.67) が成立する．

(iii) 任意の実数 λ に対して，$A-\lambda$ は自己共役であるから，補題 2.37 によって，$\mathsf{H} = \ker(A-\lambda) \bigoplus \overline{\mathsf{R}(A-\lambda)}$．したがって，$A-\lambda$ が単射であるとすれば，$\mathsf{H} = \overline{\mathsf{R}(A-\lambda)}$，すなわち，$\mathsf{R}(A-\lambda)$ は稠密である．ゆえに，$\lambda \notin \sigma_{\mathrm{r}}(A)$．これと (i) により，$\sigma_{\mathrm{r}}(A) = \emptyset$．

(iv)（必要性） 対偶を示す．そこで，条件にいう点列 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在しないと仮定しよう．このとき，定数 $c > 0$ が存在して，すべての $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\|(A-\lambda)\Psi\| \geq c\|\Psi\|$ が成り立つ．これは，$A-\lambda$ が単射であること，および $(A-\lambda)^{-1}$ の有界性を意味する．$A-\lambda$ の単射性と補題 2.37(ii) によって，$\mathsf{H} = \overline{\mathsf{R}(A-\lambda)}$．したがって，$\mathsf{R}(A-\lambda)$ は稠密である．ゆえに，$\lambda \in \varrho(A)$．

（十分性） Ψ_n を条件のものとする．仮に，$\lambda \in \varrho(A)$ とすれば，$A-\lambda$ は全単射であり，$(A-\lambda)^{-1}$ は有界である．したがって，$\Psi_n = (A-\lambda)^{-1}(A-\lambda)\Psi_n \to (A-\lambda)^{-1}0 = 0$ $(n \to \infty)$．これは，$\|\Psi_n\| = 1$ と矛盾する．ゆえに，$\lambda \in \sigma(A)$ でなければならない． □

定理 2.40(iii) は自己共役演算子のスペクトルを同定するのにしばしば有用である．これは，また，自己共役演算子の場合には，スペクトルの点は固有値の概念のある種の一般化になっていることを示している．

2.3.4　対称演算子が自己共役であるための判定条件

量子力学への応用において現われる演算子はさしあたって対称演算子であることしかわからないのが普通である．そこで，どのような条件がみたされれば，対称演算子が自己共役となるかを抽象的な形式で考察しておくことは重要である．これは純理論的にも興味のある事柄である．次の定理は，対称演算子が自己共役であるための判定条件をあたえる．

定理 2.41　A を H 上の対称演算子とする．このとき，次の (i), (ii), (iii) は同値である．

(i)　A は自己共役である．

(ii)　A は閉であり，$\ker(A^* \pm i) = \{0\}$．

(iii)　$\mathsf{R}(A \pm i) = \mathsf{H}$.

証明　(i)$\Longrightarrow$ (ii): A を自己共役とする．したがって，$A = A^*$ である．一方，A^* は閉であるから，A は閉である．$\Psi \in \ker(A^* + i)$ とすれば $A^*\Psi = -i\Psi$．$\mathsf{D}(A) = \mathsf{D}(A^*)$ であるから，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ であり，$A\Psi = -i\Psi$ となる．A の固有値は実数に限られるから，$\Psi = 0$ でなければならない．したがって，$\ker(A^* + i) = \{0\}$．同様にして，$\ker(A^* - i) = \{0\}$ が証明される．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): $\Phi \in \mathsf{R}(A+i)^\perp$ とすれば，$\langle A\Psi, \Phi\rangle = \langle \Psi, i\Phi\rangle, \Psi \in \mathsf{D}(A)$．これは，$\Phi \in \mathsf{D}(A^*), A^*\Phi = i\Phi$ を意味する．したがって，$\Phi \in \ker(A^* - i)$．仮定により，$\Phi = 0$. ゆえに，$\mathsf{R}(A+i)$ は H で稠密である．補題 2.39(iii) によって，$\mathsf{R}(A+i)$ は閉であるから，$\mathsf{H} = \mathsf{R}(A+i)$．同様にして，$\mathsf{R}(A-i) = \mathsf{H}$ も証明される．

(iii)$\Longrightarrow$ (i): $A \subset A^*$ であるから，(i) を証明するには，$\mathsf{D}(A^*) \subset \mathsf{D}(A)$ を示せば十分である．そこで，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*)$ としよう．いま，仮定により，$\mathsf{R}(A-i) = \mathsf{H}$ であるから，$(A-i)\Phi = (A^*-i)\Psi$ をみたす $\Phi \in \mathsf{D}(A)$ が存在する．$\mathsf{D}(A) \subset \mathsf{D}(A^*)$ であるから，$\Phi - \Psi \in \mathsf{D}(A^*)$ であって，$(A^* - i)(\Psi - \Phi) = 0$ と変形できる．ところが，もうひとつの条件 $\mathsf{R}(A+i) = \mathsf{H}$ は，補題 2.37(ii) によって（そこの A として $A^* - i$ を考える），$\ker(A^* - i) = \{0\}$ を意味する（$(A^* - i)^* = \bar{A} + i$ であるが，$\mathsf{R}(A+i) \subset \mathsf{R}(\bar{A}+i)$ であるから，$\mathsf{R}(\bar{A}+i) = \mathsf{H}$）．したがって，$\Psi = \Phi$. ゆえに $\Psi \in \mathsf{D}(A)$．よって，$\mathsf{D}(A^*) \subset \mathsf{D}(A)$ が示された．　□

2.3.5　スペクトルによる自己共役演算子の特徴づけ

次の定理は，閉対称演算子が自己共役となるための条件をスペクトルの言葉で特徴づけるものである．

定理 2.42　A を H 上の閉対称演算子とする．このとき，A が自己共役であるための必要十分条件は，$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ が成り立つことである．

証明　自己共役演算子のスペクトルが $\mathbb{R}$ の閉部分集合であることはすでに証明した（定理 2.40(i)）．そこで定理の条件の十分性だけを示せばよい．そのために，$\sigma(A) \subset \mathbb{R}$ と仮定する．このとき，$\pm i \in \varrho(A)$．したがって，命題 2.19

によって，$\mathsf{R}(A \pm i) = \mathsf{H}$．したがって，定理 2.41 の (iii) が成り立つ．ゆえに A は自己共役である．□

定理 2.42 は，量子力学における物理量に対する公理を定式化するうえでの基礎となる数学的事実のひとつである（3 章を参照）．

2.3.6　本質的自己共役性

すでに見たように，対称演算子は可閉である．ヒルベルト空間 H 上の対称演算子 A について，その閉包 $\bar{A}$ が自己共役であるとき，A は**本質的に自己共役** (essentially self-adjoint) であるという．この言葉の使い方の正当性は，次の事実による．

命題 2.43　A を本質的に自己共役な対称演算子としよう．このとき，A はただひとつの自己共役拡大をもち，それは $\bar{A}$ に等しい．

証明　B を A の自己共役拡大とすれば，B は閉であるから，$\bar{A} \subset B$．ところが，自己共役演算子は非自明な対称拡大をもたないから（命題 2.34），$\bar{A} = B$ でなければならない．□

対称演算子はどのような条件をみたせば本質的に自己共役であろうか．これは応用上も重要な問題である．これに答えるのが次の定理である．

定理 2.44　A をヒルベルト空間 H 上の対称演算子とするとき，次の三つの条件 (i), (ii), (iii) は同値である．

(i)　A は本質的に自己共役である．

(ii)　$\ker(A^* \pm i) = \{0\}$．

(iii)　$\mathsf{R}(A \pm i)$ は H において稠密である．

証明　(i) $\Longrightarrow$ (ii)．A が本質的に自己共役ならば，$\bar{A}$ は自己共役．したがって，定理 2.41(ii) によって $\ker((\bar{A})^* \pm i) = \{0\}$．ところが，$A$ は可閉であるから，$(\bar{A})^* = A^*$．したがって，(ii) がでる．

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)．$(\bar{A})^* = A^*$ であるから，補題 2.37(ii) によって，$\overline{\mathsf{R}(\bar{A} \pm i)} = \mathsf{H}$．これと，命題 2.8(iii) で A が $A \pm i$ の場合を考えると，$\overline{\mathsf{R}(A \pm i)} = \mathsf{H}$ を得る．したがって，(iii) が導かれる．

(iii) $\Longrightarrow$ (i). この場合，補題 2.37(ii) と $\mathsf{R}(\bar{A}\pm i)$ の閉性により（補題 2.39(iii) を応用せよ），$\mathsf{R}(\bar{A}\pm i)=\mathsf{H}$. これと定理 2.41 によって，$\bar{A}$ は自己共役である．したがって，A は本質的に自己共役である． □

2.3.7　演算子の芯

演算子の制限の概念については，すでに 1 章，1.2 節，1.2.3 項でふれた．閉演算子 A に対し，部分空間 $\mathsf{D}\subset\mathsf{D}(A)$ があって，A の D への制限 $A\restriction\mathsf{D}$ が可閉であってその閉包が A に等しいとき，すなわち，$\overline{A\restriction\mathsf{D}}=A$ ならば，D を A の**芯** (core) という．

A を対称演算子，$\mathsf{D}\subset\mathsf{D}(A)$ を稠密な部分空間とすれば，A の D への制限 $A\restriction\mathsf{D}$ も対称演算子であることは容易にわかる．この対称演算子が本質的に自己共役であるとき，***A* は D 上で本質的に自己共役**であるという．したがって，D が自己共役演算子 A の芯であることは，A が D 上で本質的に自己共役であることと同値である．

例 2.14　F を $\mathbb{R}^d$ 上の実数値可測関数とし，任意の $R>0$ に対して，

$$\int_{|x|\le R}|F(x)|^2dx<\infty$$

をみたすとする (付録 C の C.2 節の記号でいえば，$F\in\mathsf{L}^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$ ということ)．この関数 F による，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のかけ算演算子 M_F は自己共役である (例 2.13)．任意の $f\in\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，${\rm supp}\,f\subset\{x\in\mathbb{R}^d|\,|x|\le R_0\}$ をみたす $R_0>0$ がとれるから，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|F(x)f(x)|^2dx &= \int_{|x|\le R_0}|F(x)|^2|f(x)|^2dx\\ &\le \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|\right)^2\int_{|x|\le R_0}|F(x)|^2dx<\infty.\end{aligned}$$

したがって，$f\in\mathsf{D}(M_F)$．ゆえに，

$$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)\subset\mathsf{D}(M_F).$$

次に，$\boldsymbol{M_F}$ **は** $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ **上で本質的に自己共役である**ことを示そう．$M_{F,0}:=M_F\restriction\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする．$g\in\mathsf{R}(M_{F,0}+i)^\perp$ とすれば，任意の $f\in\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に

対して，$\langle g, (M_{F,0}+i)f \rangle = 0$．したがって，$\int_{\mathbb{R}^d}[(F(x)+i)g(x)^*]f(x)dx = 0$．シュヴァルツの不等式により，$(F+i)g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$（記号については，付録C，C.2 節を参照）．ゆえに，ドゥ・ボワ・レイモン (de Bois–Raymond) の補題（付録 C，C.2 節，補題 C.3）によって，$(F(x)+i)g(x) = 0$, a.e.x．これは，$g(x) = 0$, a.e.x, を導く．したがって，$\mathsf{R}(M_{F,0}+i)$ は稠密である．同様にして，$\mathsf{R}(M_{F,0}-i)$ も稠密であることがわかる．ゆえに，定理 2.44(iii) によって，$M_{F,0}$ は本質的に自己共役である．

2.3.8 自己共役な微分演算子の族—本質的に自己共役でない閉対称演算子の自己共役拡大の例

例 2.12 において，自己共役でない閉対称演算子の例を見た（例 2.12 の記号で，演算子 $\hat{p}$）．これは，演算子 $\hat{p}_0$ が本質的に自己共役でないということを意味する．この項では，$\hat{p}$ が非可算個の互いに異なる自己共役拡大をもつことを証明することによって，非有界演算子の世界が有するある種の驚異的な側面あるいは繊細かつ微妙な特質の一端を示したい．

区間 $[a,b]$ 上の関数 f が，$[a,b]$ 上の可積分関数 u と定数 c を用いて，

$$f(x) = \int_a^x u(y)dy + c, \quad x \in [a,b],$$

と表わされるとき，f は $[a,b]$ 上で**絶対連続** (absolutely continuous) であるという．この場合，容易にわかるように，f は $[a,b]$ 上で連続である*9．さらに，f はルベーグ測度に関して，a.e. 微分可能であり，$f'(x) = u(x)$, a.e. $x \in [a,b]$ が成り立つ*10．関数 f, g が $[a,b]$ 上で絶対連続ならば，部分積分公式

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

が成立する．

---

*9 $h > 0$ のとき，$f(x+h) - f(x) = \int_{[a,b]} u_h(y)dy$, $u_h(y) := \chi_{(x,x+h]}(y)u(y)$ と書ける．$|u_h(y)| \le |u(y)|$, $\lim_{h\to 0} u_h(y) = 0$, $y \in [a,b]$，であるから，ルベーグの優収束定理によって，$f(x+h) - f(x) \to 0$ $(h \to 0)$．$h < 0$ の場合も同様．

*10 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房，12 版，1974）の §19，定理 19.3 または G. テンプル『物理・工学のためのルベーグ積分入門』（ダイヤモンド社，1981）の定理 9.4.5 を見よ．

$[a,b]$ 上の絶対連続関数 f で $f' \in \mathsf{L}^2([a,b])$ となるものの全体を $\mathrm{AC}^2[a,b]$ で表わす[*11].

さて，$|\alpha| = 1$ をみたす任意の複素数 α に対して，$\mathsf{L}^2([0,1])$ 上の演算子 A_α を次のように定義する：

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(A_\alpha) &:= \{f \in \mathrm{AC}^2[0,1] |\ f(0) = \alpha f(1)\}, \\ (A_\alpha f)(x) &:= -i\frac{df(x)}{dx}, \quad \text{a.e.}\, x,\ f \in \mathsf{D}(A_\alpha). \end{aligned}$$

次の事実を証明しよう：

(★)　演算子 A_α は自己共役である．

まず，A_α が対称演算子であることを示す．$\mathsf{C}_0^\infty(0,1) \subset \mathrm{AC}^2[0,1]$ であるから，$\mathsf{D}(A_\alpha)$ は稠密である．任意の $f, g \in \mathsf{D}(A_\alpha)$ に対して，上の部分積分公式より，

$$\langle f, A_\alpha g\rangle = -i\{f(1)^* g(1) - f(0)^* g(0)\} + i\int_0^1 f'(x)^* g(x) dx.$$

そこで，条件 $f(0) = \alpha f(1)$, $g(0) = \alpha g(1)$, $|\alpha| = 1$, を使えば，右辺第 1 項は 0 となる．したがって，$\langle f, A_\alpha g\rangle = \langle A_\alpha f, g\rangle$ が得られる．よって，A_α は対称演算子である．

次に A_α は閉演算子であることを示す．$\{f_n\}_n \subset \mathsf{D}(A_\alpha)$, $f_n \to f \in \mathsf{L}^2([0,1])$, $A_\alpha f_n \to g \in \mathsf{L}^2([0,1])$ $(n \to \infty)$ としよう．任意の $x \in [0,1]$ に対して，

$$f_n(x) = i\langle \chi_{[0,x]}, A_\alpha f_n\rangle + f_n(0)$$

と書ける．したがって，各 $x \in [0,1]$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty}\{f_n(x) - f_n(0)\} = i\langle \chi_{[0,x]}, g\rangle \tag{i}$$

---

*11 f が絶対連続ならば，$f \in \mathsf{L}^2([a,b])$ である．なぜなら，上に見たように，f は $[a,b]$ 上で連続だからである．

また,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |\langle \chi_{[0,x]}, A_\alpha f_n\rangle - \langle \chi_{[0,x]}, g\rangle|^2 dx &\le \int_0^1 \|\chi_{[0,x]}\|^2 \|A_\alpha f_n - g\|^2 dx \\ &\le \|A_\alpha f_n - g\|^2 \\ &\to 0\ (n \to \infty).\end{aligned}$$

したがって, (i) は $\mathsf{L}^2([0,1])$ の位相でも成り立つ. これと $f_n(0) = \{f_n(0) - f_n\} + f_n$ に注意すると, $\mathsf{L}^2([0,1])$ の位相で, $f_n(0) \to -i\langle \chi_{[0,x]}, g\rangle + f\ (n \to \infty)$. したがって, 部分列 $\{n_j\}_{j=1}^\infty$ があって,

$$\lim_{n\to\infty} f_{n_j}(0) = -i\langle \chi_{[0,x]}, g\rangle + f(x) \quad \text{a.e.}\, x.$$

ゆえに, 右辺の関数は実は a.e. で定数に等しい. この定数を c とすれば,

$$f(x) = i\int_0^x g(y)dy + c \quad \text{a.e.}\, x.$$

右辺の関数は絶対連続であるから, L^2 空間における相等の定義により, f は絶対連続関数と同一視でき, $f'(x) = ig(x)$, a.e. x が成り立つ. (i) によって,

$$\lim_{n\to\infty}\{f_n(1) - f_n(0)\} = i\int_0^1 g(y)dy\ (n \to \infty).$$

したがって,

$$\lim_{j\to\infty} f_{n_j}(1) = c + i\int_0^1 g(y)dy\ (n \to \infty).$$

これと $f_{n_j}(0) = \alpha f_{n_j}(1)$ によって, $c = \alpha\left(c + i\int_0^1 g(y)dy\right)$. これは, $f(0) = \alpha f(1)$ と同等である. よって, $f \in \mathsf{D}(A_\alpha)$ かつ $A_\alpha f = -if' = g$ が得られる. ゆえに, A_α は閉である.

いまの結果と前々段の結果を合わせると, A_α は閉対称演算子であることが示されたことになる. したがって, A_α が自己共役であることを示すには, A_α が本質的に自己共役であることを示せば十分である. この目的のために, 定理 2.44 を応用することを考える.

準備として，A_α の固有値を求める．固有ベクトル方程式 $A_\alpha f = \lambda f$ $[f \in \mathsf{D}(A_\alpha)]$ は，

$$f'(x) = i\lambda f(x), \quad f \in \mathrm{AC}^2[0,1],$$

と同等である．この方程式の非自明な解は，$c \neq 0$ を定数として，$f(x) = ce^{i\lambda x}$ という形に限られる．境界条件 $f(0) = \alpha f(1)$ から，$1 = \alpha e^{i\lambda}$ でなければならない．$|\alpha| = 1$ であるから，$\alpha = e^{i\theta_\alpha}$ と表わされる（$\theta_\alpha \in [0, 2\pi)$ は α の偏角）．したがって，$e^{i(\lambda+\theta_\alpha)} = 1$．これは，$n \in \mathbb{Z}$ があって，$\lambda + \theta_\alpha = 2\pi n$，すなわち，$\lambda = 2\pi n - \theta_\alpha$ を意味する．ゆえに，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A_\alpha) \subset \{2\pi n - \theta_\alpha\}_{n\in\mathbb{Z}}.$$

逆に，

$$\psi_n(x) := e^{2\pi i n x} e^{-i\theta_\alpha x}, \quad n \in \mathbb{Z},$$

とおくと，$\psi_n \in \mathsf{D}(A_\alpha)$ であり，$A_\alpha \psi_n = (2\pi n - \theta_\alpha)\psi_n$ が成り立つ．すなわち，$2\pi n - \theta_\alpha$ は A_α の固有値であり，ψ_n はこれに属する固有ベクトルである．いまの議論から，固有値 $2\pi n - \theta_\alpha$ は単純固有値であることも容易にわかる．よって，

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A_\alpha) = \{2\pi n - \theta_\alpha\}_{n\in\mathbb{Z}}. \tag{ii}$$

演算子 A_α の固有関数系 $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $\mathsf{L}^2([0,1])$ の CONS である．実際，$\mathsf{L}^2([0,1])$ と $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ の自然な同型対応（例 1.39）によって，$\{e^{2\pi i n x}\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $\mathsf{L}^2([0,1])$ の CONS であることがわかる．これがわかれば，定理 1.18(iv) を応用することにより，正規直交系 $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $\mathsf{L}^2([0,1])$ の CONS であることが示される．

さて，$g \in \mathsf{R}(A_\alpha + i)^\perp$ としよう．したがって，特に，すべての $n \in \mathbb{Z}$ に対して，$0 = \langle g, (A_\alpha + i)\psi_n\rangle = (2\pi n - \theta_\alpha + i)\langle g, \psi_n\rangle$．したがって，$\langle g, \psi_n\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{Z}$．$\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は CONS であるから，$g = 0$ である．ゆえに，$\mathsf{R}(A_\alpha + i)$ は稠密である．同様にして，$\mathsf{R}(A_\alpha - i)$ も稠密であることが示される．したがっ

て，定理 2.44 によって，A_α は本質的に自己共役である．以上から，(★) が証明された．

最後に，A_α のスペクトルについて，

$$\sigma(A_\alpha) = \sigma_{\mathrm{p}}(A_\alpha) = \{2\pi n - \theta_\alpha\}_{n\in\mathbb{Z}} \tag{iii}$$

が成立することを証明しよう．

(ii) によって，第 1 の等号を示せばよい．そのためには，任意の $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\pi n - \theta_\alpha\}_{n\in\mathbb{Z}}$ が $\varrho(A_\alpha)$ に属することを示せばよい．任意の $f \in \mathsf{D}(A_\alpha)$ に対して，f_N $(N \in \mathbb{N})$ を

$$f_N = \sum_{n=-N}^{N} \langle \psi_n, f\rangle \psi_n \in \mathsf{D}(A_\alpha)$$

によって定義する．このとき，$f_N \to f$ $(N \to \infty)$ ($\because$ $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ は $\mathsf{L}^2([0,1])$ の CONS)．また，

$$A_\alpha f_N = \sum_{n=-N}^{N} (2\pi n - \theta_\alpha)\langle \psi_n, f\rangle \psi_n. \tag{iv}$$

部分積分により，$n \neq \theta_\alpha/(2\pi)$ に対して，$\langle \psi_n, f\rangle = i(2\pi n - \theta_\alpha)^{-1}\langle \psi_n, f'\rangle$．したがって，$\sum_{n\in\mathbb{Z}} |2\pi n - \theta_\alpha|^2 |\langle \psi_n, f\rangle|^2 = \sum_{n\in Z} |\langle \psi_n, f'\rangle|^2 < \infty$．ゆえに，(iv) の右辺は $\mathsf{L}^2([0,1])$ の位相で収束するから，

$$A_\alpha f_N \to g := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi n - \theta_\alpha)\langle \psi_n, f\rangle \psi_n \in \mathsf{L}^2([0,1]) \ (N \to \infty).$$

A_α は閉であるから，

$$A_\alpha f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (2\pi n - \theta_\alpha)\langle \psi_n, f\rangle \psi_n \tag{v}$$

が得られる．いま，$\delta := \inf_{n\in\mathbb{Z}} |2\pi n - \theta_\alpha - \lambda| > 0$ であるから，

$$\begin{aligned}
\|(A_\alpha - \lambda) f\|^2 &= \sum_{n\in z} |(2\pi n - \theta_\alpha - \lambda)\langle \psi_n, f\rangle|^2 \\
&\geq \delta^2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\langle \psi_n, f\rangle|^2 \\
&= \delta^2 \|f\|^2.
\end{aligned}$$

これは，$A_\alpha - \lambda$ の単射性と $(A_\alpha - \lambda)^{-1}$ の有界性を意味する．また，$\mathsf{R}(A_\alpha + i)$ の稠密性を示したのと同じ仕方で，$\mathsf{R}(A_\alpha - \lambda)$ は稠密であることがわかる．したがって，$\lambda \in \varrho(A_\alpha)$．よって，(iii) が証明された．

$\hat{p}_0$ を例 2.12 の対称演算子とすれば，$\hat{p}_0 \subset A_\alpha$．したがって，$\hat{p} \subset A_\alpha$（$\hat{p}$ は $\hat{p}_0$ の閉包）．すなわち，A_α は $\hat{p}$ の自己共役拡大である．こうして，閉対称演算子 $\hat{p}$ は，非可算個の互いに異なる自己共役拡大をもつことがわかる．この例は，**本質的に自己共役でない対称演算子は互いに異なる複数（非可算個も可能!）の自己共役拡大をもつ可能性がある**，ということを例証するものである．

注意　式 (v) は，自己共役演算子 A_α のスペクトル表示をあたえる（2.5 節以降を参照）．

2.4　射影演算子

有界な自己共役演算子のクラスで重要な役割を演じるものが存在する．これを次に考察しよう．H をヒルベルト空間，M を H の閉部分空間とする．このとき，正射影定理によって，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，M 上への正射影 Ψ_{M} がただひとつ定まる．したがって，対応 : $\Psi \to \Psi_{\mathsf{M}}$ は H 上の写像を定める．この写像を P_{M} と書く：

$$P_{\mathsf{M}}\Psi := \Psi_{\mathsf{M}}. \tag{2.68}$$

M に関する，H の直交分解の一意性を使えば，P_{M} が線形であることは容易にわかる．演算子 P_{M} を M 上への**射影演算子**または**直交射影** (orthogonal projection) とよぶ．

M の CONS を $\{\Psi_n\}_{n=1}^N$ とすれば（N は高々可算），例 1.17 から，

$$P_{\mathsf{M}}\Psi = \sum_{n=1}^{N} \langle \Psi_n, \Psi \rangle \Psi_n, \quad \Psi \in \mathsf{H}, \tag{2.69}$$

が成り立つ（例 1.17 は，$N < \infty$ の場合であったが，$N = \infty$ の場合も同様である）．

例 2.15 $B \subset \mathbb{R}^d$ を閉集合で $|B| \neq 0$ となるものとする．$B^c := \mathbb{R}^d \setminus B$（$B$ の，$\mathbb{R}^d$ における補集合）とし，

$$\mathsf{M} = \{f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d) |\ f(x) = 0,\ \text{a.e.}x \in B^c\}$$

とおけば，これが $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の部分空間であることはただちにわかる．M が閉集合であることを示すために，$f_n \in \mathsf{M}, f_n \to f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ $(n \to \infty)$ としよう．このとき，付録 A の定理 A.16 によって，部分列 $\{f_{n_k}\}_k$ が存在して，$f_{n_k}(x) \to f(x)$, a.e.x．したがって，$f(x) = 0$, a.e.$x \in B^c$．ゆえに，M は閉部分空間である．任意の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ は $f = \chi_B f + \chi_{B^c} f$ と書くことができ（χ_B は B の定義関数），$\chi_B f \in \mathsf{M}, \chi_{B^c} f \in \mathsf{M}^\perp$ であるので，$P_{\mathsf{M}} f = \chi_B f$ である．

命題 2.45 P_{M} は有界な自己共役演算子であり，$\|P_{\mathsf{M}}\| \leq 1$ が成り立つ．さらに，

$$P_{\mathsf{M}}^2 = P_{\mathsf{M}}, \tag{2.70}$$

$$0 \leq P_{\mathsf{M}} \leq I, \tag{2.71}$$

が成立する．

証明 $\|\Psi_{\mathsf{M}}\| \leq \|\Psi\|$ であるから，P_{M} は有界であり，$\|P_{\mathsf{M}}\| \leq 1$ が成立する．任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, P_{\mathsf{M}} \Phi \rangle = \langle \Psi, \Phi_{\mathsf{M}} \rangle = \langle \Psi_{\mathsf{M}}, \Phi_{\mathsf{M}} \rangle = \langle \Psi_{\mathsf{M}}, \Phi \rangle = \langle P_{\mathsf{M}} \Psi, \Phi \rangle.$$

したがって，$P_{\mathsf{M}} = P_{\mathsf{M}}^*$ であるから，P_{M} は自己共役である．

任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$P_{\mathsf{M}} \Psi \in \mathsf{M}$ であるから，$P_{\mathsf{M}}(P_{\mathsf{M}} \Psi) = P_{\mathsf{M}} \Psi$．ゆえに，(2.70) を得る．(2.70) と P_{M} の自己共役性によって，任意の $\Psi \in \mathsf{M}$ に対して，$\langle \Psi, P_{\mathsf{M}} \Psi \rangle = \langle P_{\mathsf{M}} \Psi, P_{\mathsf{M}} \Psi \rangle \geq 0$．したがって，$P_{\mathsf{M}} \geq 0$．正射影定理によって，任意の閉部分空間 M に対して

$$P_{\mathsf{M}} + P_{\mathsf{M}^\perp} = I \tag{2.72}$$

が成り立つ．したがって，$I - P_{\mathsf{M}}$ は $\mathsf{M}^\perp$ への射影演算子である．ゆえに，$I - P_{\mathsf{M}} \geq 0$．これは (2.71) の第 2 の不等号を導く． □

閉部分空間への射影演算子の概念は抽象化されうる：H 上の有界演算子 P で，$P^2 = P$ （べき等性）および $P^* = P$（自己共役性）をみたすものを**射影演算子**またはまたは**直交射影**という．

命題 2.46 P を射影演算子とする．このとき，次の (i)～(iv) が成り立つ：

(i) $\Psi \in \mathsf{R}(P)$ ならば $P\Psi = \Psi$.

(ii) $\Psi \in \mathsf{R}(P)^\perp$ ならば $P\Psi = 0$.

(iii) $\mathsf{R}(P)$ は閉部分空間である．

(iv) $P = P_{\mathsf{R}(P)}$.

証明 (i) $\Psi \in \mathsf{R}(P)$ ならば，$\Psi = P\Phi$ となる $\Phi \in \mathsf{H}$ がある．したがって，$P\Psi = P^2\Phi = P\Phi = \Psi$．ここで，$P$ のべき等性を用いた．

(ii) $\Psi \in \mathsf{R}(P)^\perp$ とすれば，任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$\langle \Phi, P\Psi \rangle = \langle P\Phi, \Psi \rangle = 0$. したがって，$P\Psi = 0$.

(iii) $\Psi_n \in \mathsf{R}(P)$, $\Psi_n \to \Psi \in \mathsf{H}$ $(n \to \infty)$ とする．したがって，$P\Psi_n \to P\Psi$ $(n \to \infty)$．一方，(i) により，$P\Psi_n = \Psi_n$ だから，$\Psi_n \to P\Psi$ $(n \to \infty)$. よって，$\Psi = P\Psi \in \mathsf{R}(P)$．ゆえに，$\mathsf{R}(P)$ は閉である．

(iv) (iii) によって，$\mathsf{R}(P)$ は閉部分空間であるので，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ は，$\Psi = \Psi_{\mathsf{R}(P)} + \Psi_{\mathsf{R}(P)^\perp}$ と分解される．これと (i), (ii) により，$P\Psi = \Psi_{\mathsf{R}(P)} = P_{\mathsf{R}(P)}\Psi$．したがって，$P = P_{\mathsf{R}(P)}$. □

上の二つの命題によって，H の閉部分空間と射影演算子は 1 対 1 に対応していることがわかる．したがって，閉部分空間どうしの関係は，対応する射影演算子の関係として表現できる．次の命題はこの構造の基本的な例をあたえる．

命題 2.47 M, N を H の二つの閉部分空間とする．

(i) $\mathsf{M} \perp \mathsf{N}$ であることと

$$P_{\mathsf{M}} P_{\mathsf{N}} = 0 \tag{2.73}$$

は同値である．

(ii) $\mathsf{M} \subset \mathsf{N}$ であることと

$$P_{\mathsf{M}} P_{\mathsf{N}} = P_{\mathsf{N}} P_{\mathsf{M}} = P_{\mathsf{M}} \tag{2.74}$$

は同値である.

(iii) (2.74) と

$$P_{\mathsf{M}} \leq P_{\mathsf{N}} \tag{2.75}$$

は同値である.

証明 (i) $\mathsf{M} \perp \mathsf{N}$ とすると，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$P_{\mathsf{N}}\Psi \in \mathsf{M}^{\perp}$. したがって，$P_{\mathsf{M}}P_{\mathsf{N}}\Psi = 0$. ゆえに，(2.73) が成立する.

逆に，(2.73) が成り立つならば，$\mathsf{N} = \mathsf{R}(P_{\mathsf{N}}) \subset \mathsf{M}^{\perp}$. したがって，$\mathsf{M} \perp \mathsf{N}$.

(ii) $\mathsf{M} \subset \mathsf{N}$ ならば，$\mathsf{R}(P_{\mathsf{M}}) \subset \mathsf{N}$ であるから，$P_{\mathsf{N}}P_{\mathsf{M}} = P_{\mathsf{M}}$. この等式の共役をとれば，$P_{\mathsf{M}}P_{\mathsf{N}} = P_{\mathsf{M}}$. したがって，(2.74) が成立.

逆に，(2.74) が成立すれば，$P_{\mathsf{N}}P_{\mathsf{M}} = P_{\mathsf{M}}$ は $\mathsf{R}(P_{\mathsf{M}}) \subset \mathsf{R}(P_{\mathsf{N}})$ を意味するので，$\mathsf{M} \subset \mathsf{N}$.

(iii) (2.74) が成立すれば，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, P_{\mathsf{M}}\Psi \rangle = \langle P_{\mathsf{N}}\Psi, P_{\mathsf{M}}\Psi \rangle \leq \|P_{\mathsf{N}}\Psi\|\|P_{\mathsf{M}}\Psi\|.$$

左辺は，$\|P_{\mathsf{M}}\Psi\|^2$ に等しいから，$\|P_{\mathsf{M}}\Psi\| \leq \|P_{\mathsf{N}}\Psi\|$ を得る. これは，$\langle \Psi, P_{\mathsf{M}}\Psi \rangle \leq \langle \Psi, P_{\mathsf{N}}\Psi \rangle$ を意味する. したがって，(2.75) が成立.

逆に，(2.75) が成立すれば，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\|P_{\mathsf{N}}P_{\mathsf{M}}\Psi - P_{\mathsf{M}}\Psi\|^2 = \langle P_{\mathsf{M}}\Psi, P_{\mathsf{M}}(P_{\mathsf{M}}\Psi) \rangle - \langle P_{\mathsf{M}}\Psi, P_{\mathsf{N}}(P_{\mathsf{M}}\Psi) \rangle \leq 0.$$

これから，(2.74) が導かれる. □

命題 2.47(i) の事実に基づいて，二つの射影演算子 P, Q が $PQ = 0$ をみたすとき，P と Q は**直交する**という.

また，命題 2.47(ii), (iii) から，

$$\mathsf{M} \subset \mathsf{N} \Longleftrightarrow P_{\mathsf{M}} \leq P_{\mathsf{N}} \tag{2.76}$$

が成立することにも注意しよう.

射影演算子の性質で後に使うものをここで議論しておく. 次の命題は，射影演算子の列の収束に関する重要な事実である.

命題 2.48 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H 上の射影演算子の列とする．

(i) $\text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n = P \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ ならば，P は射影演算子である．

(ii) $\text{w-}\lim_{n\to\infty} P_n = P \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ かつ $P = P^2$ ならば，P は射影演算子であり，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n = P$．

証明 (i) 強収束すれば弱収束するので，P_n の自己共役性は P の自己共役性を導く．任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, P^2\Phi \rangle = \langle P\Psi\, P\Phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle P_n\Psi, P_n\Phi \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle \Psi, P_n\Phi \rangle = \langle \Psi, P\Phi \rangle.$$

したがって，$P^2 = P$．よって，P は射影演算子．

(ii) $\{P_n\}_n$ の弱収束と P_n の自己共役性は P の自己共役性を導く．これと $P = P^2$ によって，P は射影演算子である．任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\begin{aligned} \|P_n\Psi - P\Psi\|^2 &= \langle \Psi, P_n\Psi \rangle - 2\mathrm{Re}\, \langle P\Psi, P_n\Psi \rangle + \langle \Psi, P\Psi \rangle \\ &\to \langle \Psi, P\Psi \rangle - 2\langle P\Psi, P\Psi \rangle + \langle \Psi, P\Psi \rangle = 0. \end{aligned}$$

したがって，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n = P$． □

H 上の射影演算子の列 $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，$P_n \le P_{n+1}$ $(P_n \ge P_{n+1})$, $n \ge 1$, をみたすとき，**非減少** (non-decreasing) [**非増加** (non-increasing)] であるという．

命題 2.49

(i) $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ が H 上の射影演算子の非減少列ならば，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n$ は存在して，射影演算子である．

(ii) $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ が H 上の射影演算子の非増加列ならば，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} P_n$ は存在して，射影演算子である．

証明 (i) 任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，数列 $\{\langle \Psi, P_n\Psi \rangle\}_n$ は非減少であり，$\langle \Psi, P_n\Psi \rangle \le \|\Psi\|^2$ であるから，$\lim_{n\to\infty} \langle \Psi, P_n\Psi \rangle$ は存在する．したがって，$m > n$ のとき，命題 2.47(ii), (iii) を用いて変形することにより，

$$\|P_m\Psi - P_n\Psi\|^2 = \langle \Psi, P_m\Psi \rangle - \langle \Psi, P_n\Psi \rangle \to 0 \quad (m, n \to \infty).$$

$m < n$ の場合も同様．ゆえに，$P\Psi := \lim_{n\to\infty} P_n\Psi$ は存在する．$\|P_n\Psi\|^2 \le \|\Psi\|^2$ であるから，P は有界であり，$\|P\| \le 1$．命題 2.48(i) により，P は射影演算子である．

(ii) 任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\{\langle\Psi, P_n\Psi\rangle\}_n$ は非増加数列であり，$\langle\Psi, P_n\Psi\rangle \ge 0$ であるから，$\lim_{n\to\infty}\langle\Psi, P_n\Psi\rangle$ は存在する．あとは (i) の証明と同様． □

2.5 スペクトル族

線形代数学における重要な定理のひとつに，任意のエルミート行列は対角化可能である，というものがある．この対角化可能性は応用上も重要な役割を果たすことはよく知られた事実である．ヒルベルト空間上の演算子の理論で，これに対応するのが自己共役演算子のスペクトル定理である．これはヒルベルト空間上の演算子論における最も重要な定理のひとつである．この節では，この定理への動機づけを説明し，その証明へ向けての準備を行なう．

2.5.1 エルミート行列のスペクトル分解

一般論への導入として，線形代数学におけるエルミート行列の理論を簡単に復習しよう．$H = (H_{ij})_{i,j=1,\cdots,n}$ を n 次のエルミート行列とする．すなわち，H は，$H_{ij}^* = H_{ji}, i,j = 1,\cdots,n$ をみたす n 次の正方行列である．この行列から定まる，$\mathbb{C}^n$ 上の線形演算子を同じ記号 H で表わす（例 1.24)．このとき，H は有界であり（定理 1.30), 自己共役であることは容易にわかる．線形代数学の結果を援用すれば[*12]，H は互いに異なる実数の固有値 $\mu_1, \cdots, \mu_s$, $(s \le n)$ をもち，各固有値 μ_j に対応する固有空間を M_j，M_j への射影演算子を P_j とすれば，

$$P_jP_k = 0, \quad j \ne k, \quad P_1 + \cdots + P_s = I, \tag{2.77}$$

[*12] たとえば，佐武一郎『線型代数学』（裳華房，数学選書 1，32 版 1976 年）の IV 章を参照.

が成り立つ．さらに，H は，固有値 μ_j と射影演算子 P_j を用いて，

$$H = \sum_{j=1}^{s} \mu_j P_j \tag{2.78}$$

と表示される．この表示は H の**射影分解**とか**スペクトル分解**とよばれる．これは行列 H が対角化できることと同値である．このスペクトル分解の重要な点のひとつは，これによって，“H の関数”が簡単に定義できる点にある．実際，$\mathbb{R}$ 上の任意の関数 f に対して，$\mathbb{C}^n$ 上の線形演算子 $f(H)$ を

$$f(H) = \sum_{j=1}^{s} f(\mu_j) P_j \tag{2.79}$$

によって定義することができる．この機能は，たとえば，微分方程式の解法等で強力な道具となる．

エルミート行列から定まる自己共役演算子のスペクトル分解定理を一般のヒルベルト空間における自己共役演算子の場合へと拡張したのが以下の 2.6 節と 2.9 節で論じるスペクトル定理である．すでに見たように，無限次元のヒルベルト空間上の自己共役演算子のスペクトルは固有値だけからなるとは限らない．この点に関する問題を克服するための手がかりを得るために，(2.77), (2.78) をもっと一般的な形に書き換えることを考える．任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$E_H(\lambda) = \sum_{\mu_j < \lambda} P_j \tag{2.80}$$

とおくと，これは射影演算子である．ここで，$\sum_{\mu_j<\lambda}$ は $\mu_j < \lambda$ となる番号 j についての和を表わす．そのような j がないときは，その和は 0 とする．さらに，(2.77), (2.78) によって，次の諸式が成立する：

$$E_H(\lambda)E_H(\mu) = E_H(\mu)E_H(\lambda) = E_H(\min\{\lambda, \mu\}), \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \tag{2.81}$$

$$E_H(\mathbb{R}) = I = \text{s-}\lim_{\lambda\to\infty} E_H(\lambda), \quad \text{s-}\lim_{\lambda\to-\infty} E_H(\lambda) = 0, \tag{2.82}$$

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon\to+0} E_H(\lambda+\varepsilon) = E_H(\lambda). \tag{2.83}$$

二つの実数 a, b を $a < \mu_1,\ b > \mu_s$ をみたすようにとり，$[a, b]$ の分割

$$\Pi:\ a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_{n-1} < \lambda_n = b \tag{2.84}$$

を考える．$\mathbb{R}$ 上の連続関数 f に対して，

$$S_n(f) = \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k)[E_H(\lambda_k) - E_H(\lambda_{k-1})]$$

という演算子が定義される．これは有界演算子である．分割を細かくしていく極限 $\max_k |\lambda_k - \lambda_{k-1}| \to 0\ (n \to \infty)$ を $\Pi \to 0$ というふうに表わす．通常のスティルチェス積分（次の 2.5.2 項を参照）との類推によって，$\text{u-}\lim_{\Pi\to 0} S_n(f)$（$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ の位相での収束，すなわち，一様位相での収束）が存在するとき，これを

$$\text{u-}\int_a^b f(\lambda) dE_H(\lambda) := \text{u-}\lim_{\Pi\to 0} S_n(f)$$

のように書く．さて，分割を十分細かくすれば，各区間 $(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ には，H の固有値は高々一つしかないようにできる．このとき，$S_n(f)$ は $S_n(f) = \sum_{j=1}^{s} f(s_j)P_j$ という形に書ける．ただし，s_j は，$\lambda_{k-1} < \mu_j \le \lambda_k$ ならば $s_j = \lambda_k$ によって定義される数である．したがって，$\Pi \to 0$ とすれば，$s_j \to \mu_j$ となるので，

$$\text{u-}\lim_{\Pi\to 0} S_n(f) = \sum_{j=1}^{s} f(\mu_j)P_j = f(H)$$

が成立する．ゆえに，

$$f(H) = \text{u-}\int_a^b f(\lambda) dE_H(\lambda) \tag{2.85}$$

を得る．特に，

$$H = \text{u-}\int_a^b \lambda\, dE_H(\lambda). \tag{2.86}$$

こうして，H のスペクトル分解は，固有空間への射影演算子 P_j から定まる，射影演算子の族 $\{E_H(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ による“スティルチェス積分”として，表現しなおせることがわかる．このように表示しなおすことによって，一般のヒルベルト

空間上の自己共役演算子 A に対するスペクトル分解の形を予想することが可能となる．すなわち，この一般の場合には，(2.81)～(2.83) をみたすような射影演算子の族 $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ があって [(2.81)～(2.83) の E_H のかわりに E をいれたものが成立するという意味]，$A =$"$\int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$"と書かれるであろうということである．実際，この予想は正しいのであるが，そのためには，右辺の"積分"の意味をはっきりさせる必要がある．そこで，まず，以下ではこのような量をきちんと定義することから始める．

2.5.2 スペクトル族

H をヒルベルト空間とする．

定義 2.50 $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を H 上の射影演算子の族とする．$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ が

$$E(\lambda)E(\mu) = E(\mu)E(\lambda) = E(\min\{\lambda,\mu\}), \tag{2.87}$$

$$E(\mathbb{R}) = I = \text{s-}\lim_{\lambda\to\infty} E(\lambda),\ \text{s-}\lim_{\lambda\to-\infty} E(\lambda) = 0, \tag{2.88}$$

$$E(\lambda+0) := \text{s-}\lim_{\varepsilon\to+0} E(\lambda+\varepsilon) = E(\lambda), \tag{2.89}$$

をみたすとき，$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を**スペクトル族** (spectral family) あるいは**単位の分解** (resolution of identity) とよぶ．(2.89) の性質は，$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ の**右連続性**とよばれる．

命題 2.47(ii), (iii) によって，(2.87) は

$$\lambda < \mu \Longrightarrow E(\lambda) \le E(\mu) \tag{2.90}$$

と同値である．これと命題 2.48(i) によって，

$$E(\lambda-0) := \text{s-}\lim_{\varepsilon\to+0} E(\lambda-\varepsilon) \tag{2.91}$$

は存在し，射影演算子である．

例 2.16 ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ において，半無限区間 $(-\infty,\lambda]$ の定義関数 $\chi_{(-\infty,\lambda]}$ によるかけ算演算子を $E(\lambda)$ とする：

$$E(\lambda) := M_{\chi_{(-\infty,\lambda]}}.$$

このとき，$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ はスペクトル族である．これを証明するのは読者の演習とする．

$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を H 上のスペクトル族としよう．以下，$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を単に $\{E(\lambda)\}$ と記す．ある実数 a があって，$E(a)=0$ ならば，$\{E(\lambda)\}$ は**下に有界**であるという．この場合，(2.90) によって，$E(\lambda)=0, \lambda<a,$ である．そのような a の集合の上限を $\{E(\lambda)\}$ の**下限界** (lower bound) という．また，ある実数 a があって，$E(a)=I$ となるならば，$\{E(\lambda)\}$ は**上に有界** (bounded above) であるといい，そのような実数 a の集合の下限を $\{E(\lambda)\}$ の **上限界**(upper bound) という．右連続性により，λ が $\{E(\lambda)\}$ の上限界ならば，$E(\lambda)=I$ である．だが，λ が $\{E(\lambda)\}$ の下限界の場合には，必ずしも $E(\lambda)=0$ とはならないことに注意しよう．$\{E(\lambda)\}$ が上にも下にも有界であるとき，$\{E(\lambda)\}$ は**有界**であるという．

実数 a に対して，$\delta>0$ が存在して，$E(a+\delta)=E(a-\delta)$ が成り立つとき，a は $\{E(\lambda)\}$ の**定点** (point of constancy) とよばれる．この場合，(2.90) によって，任意の $\lambda\in[a-\delta,a+\delta]$ に対して，$E(\lambda)=E(a-\delta)$，すなわち，$E(\lambda)$ は $[a-\delta,a+\delta]$ で一定である．したがって，a が $\{E(\lambda)\}$ の定点ならば，a の適当な近傍に属する任意の点も $\{E(\lambda)\}$ の定点である．ゆえに，$\{E(\lambda)\}$ の定点全体は $\mathbb{R}$ の開集合である．$\{E(\lambda)\}$ の定点でない点をすべて集めてできる集合を $\{E(\lambda)\}$ の**台** (support) といい，$\operatorname{supp} E$ と表わす．これは $\{E(\lambda)\}$ の定点全体の補集合であるから，$\mathbb{R}$ の閉集合である．定義から明らかなように，$\{E(\lambda)\}$ が下（上）に有界であることと $\operatorname{supp} E$ が下（上）に有界であることは同値である．

例 2.17　F を $\mathbb{R}^d$ 上の実数値連続関数とし，

$$F^{-1}((-\infty,\lambda])=\{x\in\mathbb{R}^d|\ F(x)\in(-\infty,\lambda]\}$$

とおく．ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ において演算子 $E_F(\lambda)$ $(\lambda\in\mathbb{R})$ を

$$E_F(\lambda):=M_{\chi_{F^{-1}((-\infty,\lambda])}},\quad \lambda\in\mathbb{R},$$

によって定義する．このとき，$\{E_F(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ はスペクトル族である．例 2.16 のスペクトル族は，$d=1$，$F(x)=x$ の場合である．

F が有界であるとしよう．このとき，F の像 $F(\mathbb{R}^d)$ は $\mathbb{R}$ の有界集合である．したがって，$m = \inf F(\mathbb{R}^d)$, $M = \sup F(\mathbb{R}^d)$ とすれば，$m \leq F(x) \leq M$, $x \in \mathbb{R}^d$, であるから，$\lambda < m$ ならば，$E_F(\lambda) = 0$ であり，$\lambda \geq M$ ならば，$E_F(\lambda) = I$ である．したがって，スペクトル族 $\{E_F(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ は有界であり，集合 $(-\infty, m) \cup (M, \infty)$ に含まれる任意の点は $\{E_F(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ の定点である．ゆえに，$\operatorname{supp} E_F \subset [m, M]$.

次の補題を述べる前に，古典解析学におけるある数学概念を復習しておこう．f を区間 $[a,b]$ $(-\infty < a < b < \infty)$ 上の複素数値関数とする．(2.84) によってあたえられる，$[a,b]$ の分割 Π に対して，和

$$S_\Pi := \sum_{k=1}^{n} |f(\lambda_k) - f(\lambda_{k-1})|$$

が分割 Π の仕方によらない，ある定数 M をこえないとき，すなわち，$\sup_\Pi S_\Pi \leq M$ が成立するとき（左辺は $[a,b]$ のあるゆる分割についての上限を表わす），f は**有界変動** (bounded variation) の関数であるという．そのような定数 M の集合の下限を f の**全変動** (total variation) とよび，$V[f]$ と記す*13．上の定義では，a, b は有限であったが，たとえば，$a > -\infty, b = \infty$ の場合は，$f(\infty) := \lim_{t\to\infty} f(t)$ が存在し，上の定義の条件がそのまま成立するときに，f は有界変動の関数であるという．$a = -\infty, b < \infty$ の場合も $a = -\infty, b = \infty$ の場合も同様である．

f を $[a,b]$ 上の有界変動関数で，右連続であるとする．このとき，$[a,b]$ 上の任意の連続関数 u に対して，f によるスティルチェス積分

$$\int_a^b u(\lambda) df(\lambda) := \lim_{\Pi\to 0} \sum_{k=1}^{n} u(\lambda_k)[f(\lambda_k) - f(\lambda_{k-1})]$$

が定義される*14．これに対して，

$$\left| \int_a^b u(\lambda) df(\lambda) \right| \leq \sup_{\lambda\in[a,b]} |u(\lambda)| V[f]$$

*13 例：f が $[a,b]$ の非減少関数ならば，f は有界変動であり，その全変動は，$f(b) - f(a)$ に等しい．

*14 たとえば，加藤敏夫『位相解析』（共立出版，初版 1957 年，改題 5 刷 1975 年）の §29 を参照．

が成立する[*15]．任意の $\mu \in [a,b]$ と連続関数 v に対して，

$$g(\mu) = \int_a^\mu v(\lambda)df(\lambda) + C,$$

（C は任意の定数）とすれば，これは，連続な有界変動関数であり，

$$\int_a^b u(\lambda)dg(\lambda) = \int_a^b u(\lambda)v(\lambda)df(\lambda)$$

が成り立つ．これを**スティルチェス積分の変数変換公式**という．ただし，$a = -\infty$ または $b = \infty$ の場合，両辺のうち一方の積分が存在して有限ならば，他方も有限であり，この公式が成立する．

さて，$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ をスペクトル族とし，半開区間 $\Delta = (a,b]$ に対して，

$$E(\Delta) := E(b) - E(a)$$

とおく．ただし，$E(-\infty) := 0$, $E(\infty) := I$, $E(\emptyset) := 0$ とする．容易にわかるように，$E(\Delta)$ は射影演算子である．次の事実に注目しよう．

補題 2.51 $[a,b]$ を任意の区間とする ($-\infty \le a < b \le \infty$)．このとき，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$[a,b]$ 上の複素数値関数 $\lambda \to \langle\Psi, E(\lambda)\Phi\rangle$ は有界変動であり，その全変動は $\|\Psi\|\,\|\Phi\|$ をこえない．

証明 分割 Π を (2.84) のようにとる．

$$\lim_{\lambda\to-\infty}\langle\Psi, E(\lambda)\Phi\rangle = 0, \lim_{\lambda\to\infty}\langle\Psi, E(\lambda)\Phi\rangle = \langle\Psi, \Phi\rangle,$$

であるから，$a = -\infty$ または $b = \infty$ の場合も許されることを注意しておこう．$\Delta_k = (\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ とすれば，

---

*15 前掲書を参照．

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} |\langle \Psi, E(\lambda_k)\Phi\rangle - \langle \Psi, E(\lambda_{k-1})\Phi\rangle| \\
&= \sum_{k=1}^{n} |\langle \Psi, E(\Delta_k)\Phi\rangle| = \sum_{k=1}^{n} |\langle E(\Delta_k)\Psi, E(\Delta_k)\Phi\rangle| \\
&\le \sum_{k=1}^{n} \|E(\Delta_k)\Psi\| \, \|E(\Delta_k)\Phi\| \\
&\le \left(\sum_{k=1}^{n} \|E(\Delta_k)\Psi\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \|E(\Delta_k)\Phi\|^2\right)^{1/2} \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} \langle \Psi, E(\Delta_k)\Psi\rangle\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} \langle \Phi, E(\Delta_k)\Phi\rangle\right)^{1/2} \\
&= \langle \Psi, [E(b) - E(a)]\Psi\rangle^{1/2} \langle \Phi, [E(b) - E(a)]\Phi\rangle^{1/2} \\
&\le \|\Psi\| \, \|\Phi\|.
\end{aligned}
$$

したがって，補題の主張が成立する． □

$E(\lambda)$ の右連続性によって，複素数値関数 $\lambda \to \langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle$ $(\Psi, \Phi \in \mathsf{H})$ は右連続である．この関数によるスティルチェス積分を $\int_a^b f(\lambda) d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle$ (f は $[a, b]$ 上の連続関数，$-\infty < a < b < \infty$) のように表わす．区間が無限にわたる場合は，

$$
\begin{aligned}
\int_a^{\infty} f(\lambda) d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle &:= \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(\lambda) d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle, \\
\int_{-\infty}^{b} f(\lambda) d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle &:= \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(\lambda) d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle, \\
\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle &:= \lim_{a\to-\infty, b\to\infty} \int_a^b f(\lambda) d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi\rangle,
\end{aligned}
$$

のように定義する．もちろん，この定義は，上式の右辺の極限が存在する場合に限られる．

2.5.3 スペクトル族に同伴する自己共役演算子

ヒルベルト空間 H 上のスペクトル族 $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ があたえられると，$\mathbb{R}$ 上の各々の連続関数に対して，H 上の閉演算子が同伴することを示そう．その特別

な場合として，“$\int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda)$”をその象徴的な表示とするような自己共役演算子を定義される．$\mathbb{R}$ 上の連続関数の全体を $\mathsf{C}(\mathbb{R})$ で表わす．

定理 2.52　任意の $f \in \mathsf{C}(\mathbb{R})$ に対して，H 上の稠密に定義された線形演算子 $A_E(f)$ で

$$\mathsf{D}(A_E(f)) = \left\{\Psi \in \mathsf{H} \middle| \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle < \infty \right\}, \tag{2.92a}$$

$$\langle \Phi, A_E(f)\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle \Phi, E(\lambda)\Psi\rangle, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A_E(f)), \Phi \in \mathsf{H}, \tag{2.92b}$$

をみたすものがただひとつ存在する．さらに，次の (i)〜(vi) が成立する．

(i)　任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A_E(f))$ に対して，

$$\|A_E(f)\Psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle. \tag{2.93}$$

(ii)　任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，$E(\lambda)A_E(f) \subset A_E(f)E(\lambda)$ が成り立つ．

(iii)　演算子の等式

$$A_E(f^*) = A_E(f)^* \tag{2.94}$$

が成り立つ．

(iv)　$A_E(f)$ は閉である．

(v)　f が実数値ならば，$A_E(f)$ は自己共役である．

(vi)　f が有界ならば $A_E(f)$ は有界であって，

$$\|A_E(f)\| \le \|f\|_\infty. \tag{2.95}$$

(vii)　$|f(\lambda)| = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}$ ならば $A_E(f)$ はユニタリである．

証明　(2.92a) の右辺の集合を D とし，これが稠密な部分空間であることをまず示そう．任意の $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathsf{H}$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle \alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2, E(\lambda)(\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2)\rangle &= \|E(\lambda)(\alpha\Psi_1 + \beta\Psi_2)\|^2 \\ &\le 2|\alpha|^2\|E(\lambda)\Psi_1\|^2 + 2|\beta|^2\|E(\lambda)\Psi_2\|^2. \end{aligned}$$

これを使えば，D が部分空間であることがわかる．D の稠密性を示すために，$E_n := E(n) - E(-n)$, $n \in \mathbb{N}$, とし，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\Psi_n = E_n \Psi$ とおこう．このとき，

$$\langle \Psi_n, E(\lambda)\Psi_n \rangle = \begin{cases} 0 & ; \lambda \leq -n \\ \langle \Psi, [E(\lambda) - E(-n)]\Psi \rangle & ; -n < \lambda \leq n \\ \|\Psi_n\|^2 & ; \lambda > n \end{cases}.$$

したがって，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi_n, E(\lambda)\Psi_n \rangle &= \int_{-n}^{n} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle \\ &\leq \sup_{\lambda \in [-n,n]} |f(\lambda)|^2 \|\Psi\|^2 < \infty. \end{aligned}$$

ゆえに，$\Psi_n \in \mathsf{D}$. さらに，$\Psi_n \to \Psi$ $(n \to \infty)$．よって，D は稠密である．

次に，定理にいう演算子 $A_E(f)$ の存在を示そう．Π を (2.84) の分割とする．このとき，補題 2.51 の証明と同様にして，すべての $\Phi \in \mathsf{H}, \Psi \in \mathsf{D}$ に対して，

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} |f(\lambda_k)| \, |\langle \Psi, E(\lambda_k)\Phi \rangle - \langle \Psi, E(\lambda_{k-1})\Phi \rangle| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{n} |f(\lambda_k)|^2 \langle \Psi, [E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})]\Psi \rangle \right)^{1/2} \langle \Phi, [E(b) - E(a)]\Phi \rangle^{1/2}. \end{aligned}$$

したがって，

$$\left| \int_a^b |f(\lambda)| d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi \rangle \right| \leq \left(\int_a^b |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle \right)^{1/2} \|\Phi\|.$$

これから，$\Psi \in \mathsf{D}$ を任意に固定するとき，H から $\mathbb{C}$ への写像 L_Ψ を

$$L_\Psi(\Phi) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi \rangle$$

によって定義することができる．いま示した不等式によって，

$$|L_\Psi(\Phi)| \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle \right)^{1/2} \|\Phi\|.$$

L_Ψ の線形性は明らか．したがって，$L_\Psi \in \mathsf{H}^*$．ゆえに，リースの表現定理によって，$L_\Psi(\Phi) = \langle \eta_\Psi, \Phi\rangle, \|\eta_\Psi\| = \|L_\Psi\|$, となる $\eta_\Psi \in \mathsf{H}$ がただひとつ存在する．したがって，$A_E(f) : \Psi \to \eta_\Psi$ は D から H への写像を定める．これが線形であることは容易にわかる．こうして，$A_E(f)$ の存在と (2.92b) が示される．

以下，(i)～(vii) を証明する．

(i) 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A_E(f))$ に対して，$\Psi_f = A_E(f)\Psi$ とおくと，

$$\|A_E(f)\Psi\|^2 = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle \Psi_f, E(\lambda)\Psi\rangle.$$

一方，

$$\langle \Psi_f, E(\lambda)\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\mu)^* d\langle E(\mu)\Psi, E(\lambda)\Psi\rangle$$

であるが，$E(\mu)E(\lambda) = E(\min\{\mu, \lambda\})$ であるから，

$$\langle \Psi_f, E(\lambda)\Psi\rangle = \int_{-\infty}^{\lambda} f(\mu)^* d\langle \Psi, E(\mu)\Psi\rangle.$$

したがって，(2.93) が成立する．

(ii) 任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A_E(f))$ に対して，スペクトル族の性質によって，

$$\langle E(\lambda)\Psi, E(\mu)E(\lambda)\Psi\rangle = \begin{cases} \langle \Psi, E(\mu)\Psi\rangle & ;\mu \le \lambda \text{ のとき} \\ \langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle & ;\mu > \lambda \text{ のとき} \end{cases}$$

となるから，

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} |f(\mu)|^2 d\langle E(\lambda)\Psi, E(\mu)E(\lambda)\Psi\rangle &= \int_{(-\infty,\lambda]} |f(\mu)|^2 d\langle \Psi, E(\mu)\Psi\rangle \\ &\le \int_{\mathbb{R}} |f(\mu)|^2 d\langle \Psi, E(\mu)\Psi\rangle < \infty. \end{aligned}$$

したがって，$E(\lambda)\Psi \in \mathsf{D}(A_E(f))$．さらに，任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle \Phi, E(\lambda)A_E(f)\Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(\mu) d\langle E(\lambda)\Phi, E(\mu)\Psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\mu) d\langle \Phi, E(\mu)E(\lambda)\Psi\rangle = \langle \Phi, A_E(f)E(\lambda)\Psi\rangle. \end{aligned}$$

したがって，$E(\lambda)A_E(f)\Psi = A_E(f)E(\lambda)\Psi$．よって，求める結果が得られる．

(iii) $\mathsf{D}(A_E(f)) = \mathsf{D}(A_E(f^*))$ は明らか．任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A_E(f))$ に対して，

$$\langle A_E(f)\Phi, \Psi\rangle = \langle \Psi, A_E(f)\Phi\rangle^* = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda)^* d\langle \Phi, E(\lambda)\Psi\rangle = \langle \Phi, A_E(f^*)\Psi\rangle.$$

したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A_E(f)^*)$ かつ $A_E(f)^*\Psi = A_E(f^*)\Psi$．これは，$A_E(f^*) \subset A_E(f)^*$ を意味する．逆の関係を示すために，$\Psi \in \mathsf{D}(A_E(f)^*)$ としよう．上で見たように，任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$E_n\Phi \in \mathsf{D}(A_E(f))$ であり，$E_n\Phi \to \Phi$ $(n \to \infty)$ であるから，

$$\begin{aligned}
\|A_E(f)^*\Psi\| &= \lim_{n\to\infty} \|E_n A_E(f)^*\Psi\| = \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\Phi\|=1} |\langle \Phi, E_n A_E(f)^*\Psi\rangle| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\Phi\|=1} |\langle A_E(f)E_n\Phi, \Psi\rangle| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\Phi\|=1} |\langle A_E(f)E_n^2\Phi, \Psi\rangle| \quad (\because E_n^2 = E_n) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\Phi\|=1} |\langle E_n A_E(f)E_n\Phi, \Psi\rangle| \quad (\because \text{(i)}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\Phi\|=1} |\langle A_E(f)E_n\Phi, E_n\Psi\rangle| \\
&= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\Phi\|=1} |\langle \Phi, A_E(f^*)E_n\Psi\rangle| \\
&\quad (\because E_n\Psi \in \mathsf{D}(A_E(f)) = \mathsf{D}(A_E(f^*)),\ A_E(f^*) \subset A_E(f)^* \\
&\quad \text{および，(i) を } f \text{ のかわりに } f^* \text{ に対して適用}) \\
&= \lim_{n\to\infty} \|A_E(f^*)E_n\Psi\| \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle E_n\Psi, E(\lambda)E_n\Psi\rangle \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle. \quad (\because (2.93))
\end{aligned}$$

したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A_E(f))$．ゆえに，$\mathsf{D}(A_E(f)^*) \subset \mathsf{D}(A_E(f))$．よって，(2.94) が得られる．

(iv) (iii) によって，$A_E(f)$ は $A_E(f^*)$ の共役演算子である．したがって，$A_E(f)$ は閉である．

(v) f が実数値ならば，$f = f^*$ であるから，(iii) によって，$A_E(f) = A_E(f)^*$．

(vi) f が有界ならば，(2.93) によって，

$$\|A_E(f)\Psi\|^2 \le \|f\|_\infty^2 \|\Psi\|^2.$$

したがって，$A_E(f)$ は有界で (2.95) が成立する．

(vii) この場合，(vi) から $A_E(f)$ は有界である．(i) から，$\|A_E(f)\Psi\|^2 = \|\Psi\|^2$, $\Psi \in \mathsf{H}$ が成り立つ．これと偏極恒等式により，$\langle A_E(f)\Psi, A_E(f)\Phi\rangle = \langle \Psi, \Phi\rangle$, $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ を得る．これは，$A_E(f)^* A_E(f) = I$ を意味する．f のかわりに $f^*(|f| = 1 \Longleftrightarrow |f^*| = 1$ に注意) を考えると，$A_E(f^*)^* A_E(f^*) = I$．これは，(iii) を使うと，$A_E(f)A_E(f)^* = I$ と同じことである．したがって，命題 2.3 によって，$A_E(f)$ はユニタリである． □

定理 2.52 によってあたえられる閉演算子 $A_E(f)$ を記号的に

$$A_E(f) = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) \tag{2.96}$$

と表わす．ただし，この記法はあくまで象徴的なものであり，その意味するところは，(2.92a), (2.92b) が成立するということである．

特に，$f(\lambda) = \lambda$ に対する演算子

$$A_E := \int_{\mathbb{R}} \lambda dE(\lambda) \tag{2.97}$$

—これは，定理 2.52(v) によって，自己共役—を**スペクトル族 $\{E(\lambda)\}$ に同伴する自己共役演算子**という．

例 2.18 例 2.17 のスペクトル族 $\{E_F(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ に同伴する自己共役演算子 $A_{E_F} = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_F(\lambda)$ を求めてみよう．簡単のため，$F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ は 1 対 1 である場合を考える．$f \in \mathsf{D}(A_{E_F})$ であることは

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2\, d\langle f, E_F(\lambda) f\rangle < \infty$$

と同値である．

任意のボレル集合 $B \subset \mathbb{R}$ に対して，$P(B) := |\{x \in \mathbb{R}^d \mid F(x) \in B\}|$ とおけば，P は $\mathbb{R}$ 上の測度であり，変数変換式

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(F(x))dx = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, dP(\lambda)$$

が成り立つ（付録 A の定理 A.17，A.18 と同様）．ただし，g は $\mathbb{R}$ 上のボレル可測関数である（この式は，両辺の積分のどちらかが存在すればそれらは等しい，と読む．g は，そのような条件をみたす任意のボレル可測関数でよい）．

さて，

$$\begin{aligned}\langle f, E_F(\lambda) f\rangle &= \int_{F^{-1}((-\infty,\lambda])} |f(x)|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \chi_{(-\infty,\lambda]}(F(x)) \left| f\left(F^{-1}(F(x))\right)\right|^2 dx\end{aligned}$$

であるから，上の変数変換式を用いると，

$$\langle f, E_F(\lambda) f\rangle = \int_{-\infty}^{\lambda} |f(F^{-1}(\mu))|^2 dP(\mu).$$

したがって，

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \, d\langle f, E_F(\lambda) f\rangle = \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 |f(F^{-1}(\lambda))|^2 dP(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2 |f(x)|^2 dx.$$

ゆえに，$\mathsf{D}(A_{E_F}) = \mathsf{D}(M_F)$．さらに，いまと同様にして，任意の $g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ と $f \in \mathsf{D}(A_{E_F})$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle g, A_{E_F} f\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle g, E_F(\lambda) f\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda g(F^{-1}(\lambda))^* f(F^{-1}(\lambda)) dP(\lambda) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} F(x) g(x)^* f(x) dx \\ &= \langle g, M_F f\rangle.\end{aligned}$$

したがって，$A_{E_F} f = M_F f$．以上から，$A_{E_F} = M_F$ であることがわかる．よって，

$$M_F = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE_F(\lambda).$$

F が単射でない場合にもこの式は成立するが，それを示すにはもう少しこみいった解析が必要とされる（2.9 節，例 2.24 を参照）．

自己共役演算子 A_E が有界になる条件を考察しておく.

定理 2.53 A_E が有界であるための必要十分条件は $\{E(\lambda)\}$ が有界であることである.この場合,$\{E(\lambda)\}$ の下限界を m,上限界を M とすれば,

$$\|A_E\| = \max\{|m|, |M|\} \tag{2.98}$$

が成立する.

証明 (必要性)A_E は有界であるとしよう.このとき,$\mathsf{D}(A_E) = \mathsf{H}$ であるから,任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle = \|A_E\Psi\|^2 \leq \|A_E\|^2\|\Psi\|^2.$$

仮に,$\{E(\lambda)\}$ が下に有界でないとすると,$E(a_n) \neq 0$, $a_n < 0$, $a_n \to -\infty (n \to \infty)$, をみたす単調減少列 $\{a_n\}_n$ が存在する.したがって,$E(a_n)\Phi_n \neq 0$ となる $\Phi_n \in \mathsf{H}$ が存在する.そこで,$\Psi_n = E(a_n)\Phi_n/\|E(a_n)\Phi_n\|$ とおけば,$\|\Psi_n\| = 1, E(a_n)\Psi_n = \Psi_n$ であり,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \Psi_n, E(\lambda)\Psi_n\rangle &= \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \Psi_n, E(\lambda)E(a_n)\Psi_n\rangle \\ &= \int_{-\infty}^{a_n} \lambda^2 d\langle \Psi_n, E(\lambda)\Psi_n\rangle \\ &\geq a_n^2\langle \Psi_n, E(a_n)\Psi_n\rangle = a_n^2.\end{aligned}$$

したがって,

$$\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \Psi_n, E(\lambda)\Psi_n\rangle \to \infty \ (n \to \infty).$$

だが,これは矛盾である.同様に,$\{E(\lambda)\}$ は上に有界であることが示される.

(十分性)$\{E(\lambda)\}$ は有界であるとし,$\{E(\lambda)\}$ の下限界を m,上限界を M とする.このとき,任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle &= \int_{m-\varepsilon}^{M} \lambda^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle \\ &\leq \max\{(m-\varepsilon)^2, M^2\}\|\Psi\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

したがって，$\mathsf{D}(A_E) = \mathsf{H}$．いまの計算から，

$$\|A_E\Psi\|^2 \leq \max\{(m-\varepsilon)^2, M^2\}\|\Psi\|^2.$$

したがって，A_E は有界であり，

$$\|A_E\| \leq \max\{|m|, |M|\} \tag{2.99}$$

が成り立つ．

(2.98) を証明しよう．簡単のため，$0 \leq m < M$ の場合だけを証明する．他の場合も同様である．M が $\{E(\lambda)\}$ の上限界であるから，M に収束する単調増加列 $\{a_n\}_n$ $(a_n < M)$ で $E(a_n) \neq E(M)(= I)$ となるのものがとれる．したがって，$[I - E(a_n)]\Phi_n \neq 0$ となるベクトル $\Phi_n \in \mathsf{H}$ が存在する．$\Psi_n = [I - E(a_n)]\Phi_n/\|[I - E(a_n)]\Phi_n\|$ とおけば，$\|\Psi_n\| = 1, [I - E(a_n)]\Psi_n = \Psi_n$ であり，

$$\|A_E\Psi_n\|^2 = \int_{a_n}^{M} \lambda^2 d\langle\Psi_n, E(\lambda)\Psi_n\rangle \geq a_n^2$$

したがって，$a_n \leq \|A_E\|$．そこで，$n \to \infty$ とすれば，$M \leq \|A_E\|$．これと (2.99) をあわせれば，(2.98) を得る． □

2.5.4 スペクトル族と固有値

$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ をスペクトル族とし，これに同伴する自己共役演算子を A_E とする．実数 λ に対して，

$$E(\{\lambda\}) := E(\lambda) - E(\lambda - 0) \tag{2.100}$$

とおく．$E(\{\lambda\}) \neq 0$ のとき，$\{E(\lambda)\}$ は点 λ で**不連続**であるという．

次の命題は，$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ の不連続点と A_E の固有値との関係をあたえる．

命題 2.54

(i) $\Psi \in \ker(A_E - \mu)$ $(\mu \in \mathbb{R})$ であるための必要十分条件は，関数 $\lambda \to \|E(\lambda)\Psi\|^2$ が $\lambda = \mu$ を除いて定数であることである．

(ii) $\ker(A_E-\mu)$ への射影演算子は $E(\{\mu\})$ である．

証明 (i) 任意の $\Psi\in\mathsf{D}(A_E)$ に対して，

$$\begin{aligned}\|(A_E-\mu)\Psi\|^2 &= \langle (A_E-\mu)\Psi,(A_E-\mu)\Psi\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}}(\lambda-\mu)d\langle (A_E-\mu)\Psi,E(\lambda)\Psi\rangle\\ &= \int_{\mathbb{R}}(\lambda-\mu)^2 d\langle \Psi,E(\lambda)\Psi\rangle. \end{aligned}\tag{2.101}$$

したがって，$\Psi\in\ker(A_E-\mu)$ であることと，非減少関数 $\langle\Psi,E(\lambda)\Psi\rangle=\|E(\lambda)\Psi\|^2$ が $\lambda=\mu$ を除いて定数であることは同値である．

(ii) $\Psi\in\ker(A_E-\mu)$ ならば，(i) によって，$\lambda<\mu$ のとき，

$$\|E(\lambda)\Psi\|=\lim_{\lambda\to-\infty}\|E(\lambda)\Psi\|=0.$$

したがって，$E(\lambda)\Psi=0$．ゆえに，$E(\mu-0)\Psi=0$．一方，$\lambda>\mu$ のとき，

$$\|E(\lambda)\Psi\|^2=\lim_{\lambda\to\infty}\|E(\lambda)\Psi\|^2=\|\Psi\|^2.$$

$\{E(\lambda)\}$ の右連続性により，$\|E(\mu)\Psi\|^2=\|\Psi\|^2$．これは，$E(\mu)\Psi=\Psi$ を導く．したがって，$E(\{\mu\})\Psi=\Psi$．ゆえに，$\ker(A_E-\mu)\subset\mathsf{R}(E(\{\mu\}))$．

逆に，$\Psi\in\mathsf{R}(E(\{\mu\}))$ とすれば，$E(\{\mu\})\Psi=\Psi$．このとき，$\lambda\geq\mu$ ならば，$E(\lambda)\Psi=E(\lambda)E(\{\mu\})\Psi=E(\{\mu\})\Psi=\Psi$．同様にして，$\lambda<\mu$ ならば，$E(\lambda)\Psi=0$ がわかる．したがって，$\|E(\lambda)\Psi\|^2$ は $\lambda=\mu$ を除いて定数である．ゆえに，(i) から，$\Psi\in\ker(A_E-\mu)$．よって，$\mathsf{R}(E(\{\mu\}))\subset\ker(A_E-\mu)$．以上から，$\mathsf{R}(E(\{\mu\}))=\ker(A_E-\mu)$． □

2.6 スペクトル定理 (I)

2.6.1 スペクトル定理

2.5.3 項で見たように，スペクトル族にはひとつの自己共役演算子が同伴する．この逆も成立することを主張するのがスペクトル定理である：

定理 2.55 スペクトル定理 (spectral theorem). A を H 上の自己共役演算子とする．このとき，

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, dE(\lambda), \tag{2.102}$$

すなわち，

$$\mathsf{D}(A) = \left\{ \Psi \in \mathsf{H} \middle| \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 \, d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle < \infty \right\}, \tag{2.102a}$$

$$\langle \Phi, A\Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \, d\langle \Phi, E(\lambda)\Psi \rangle, \; \Psi \in \mathsf{D}(A), \; \Phi \in \mathsf{H}, \tag{2.102b}$$

が成立するようなスペクトル族 $\{E(\lambda)\}$ がただひとつ存在する．

(2.102) を自己共役演算子 A に対する**スペクトル分解** (spectral decomposition) あるいは**スペクトル表示** (spectral representation) とよぶ．

定理 2.55 にいうスペクトル族 $\{E(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ を $\boldsymbol{A}$ **に同伴する（対応する）スペクトル族**という．

スペクトル定理を証明する方法はいくつかある．しかし，いずれの証明もかなりの準備を要する．この節では，有界な自己共役演算子に対して，スペクトル定理を証明する．非有界な自己共役演算子の場合の証明は，2.9 節で行なう．

証明に入る前に準備が必要である．

2.6.2 非負有界演算子の平方根と有界演算子の絶対値

よく知られているように，複素数 z に対して，極形式とよばれる表示が存在する．すなわち，$z = |z|e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}$ である．ここで，$\mathrm{Arg}\,z \in [0, 2\pi)$ は z の偏角を表わす．ヒルベルト空間上の演算子に対しても，極形式の演算子版ともいうべき表示を得ることができる．そのためには，まず，演算子の "平方根" を定義する必要がある．これは次の補題によって可能となる．

補題 2.56 $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ を非負の自己共役演算子とする：$A \geq 0$．このとき，$A = B^2$ をみたす非負の自己共役演算子 $B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ がただひとつ存在する．さらに，B は，A と可換な任意の有界演算子と可換である．

証明 $\|A\| \le 1$ の場合を証明すれば十分である．なぜなら，そうでない場合は，$A' = A/\|A\|$ とすれば，$\|A'\| = 1$ であり，$A' = (B')^2$ $(B' \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}), B' \ge 0)$ が示せたとすれば，$B = \|A\|^{1/2}B'$ とおくことにより，$A = B^2$ が得られるからである．

$A \ge 0$ であるから，$I - A \le I$．任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Psi, (I - A)\Psi\rangle = \|\Psi\|^2 - \langle \Psi, A\Psi\rangle \ge (1 - \|A\|)\|\Psi\|^2 \ge 0.$$

したがって，$I - A \ge 0$．ゆえに，対応 $(\Psi, \Phi) \to \langle \Psi, (I - A)\Phi\rangle$ $[(\Psi, \Phi) \in \mathsf{H} \times \mathsf{H}]$ は H 上の半正定値内積をあたえる．したがって，シュヴァルツの不等式が成り立つので，

$$|\langle \Psi, (I - A)\Phi\rangle| \le \langle \Psi, (I - A)\Psi\rangle^{1/2}\langle \Phi, (I - A)\Phi\rangle^{1/2} \le \|\Psi\|\,\|\Phi\|.$$

ゆえに，$\Psi = (I - A)\Phi$ とすれば，$\|(I - A)\Phi\| \le \|\Phi\|$ を得る．これは，$\|I - A\| \le 1$ を意味する．

さて，複素関数 $f(z) := \sqrt{1 - z}$ は $\mathbb{C}\setminus[1, \infty)$ 上の一価正則関数であり，$|z| \le 1$ におけるべき級数展開は絶対収束する．これを $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ とすれば

$$c_0 = 1,\ c_1 = -1,\ c_n = -\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 3)}{2^{n-1}},\ n \ge 2.$$

したがって，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(I - A)^n$ は $\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ の元に収束する（1 章の補題 1.33 を参照）．この元を B としよう：$B = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(I - A)^n$．$c_n$ は実数であり，$(I - A)^n$ は自己共役なので，B は自己共役である．また，$0 \le I - A \le I$ であるから，$0 \le \langle \Psi, (I - A)^n\Psi\rangle \le \|\Psi\|^2, \Psi \in \mathsf{H}$（左側の不等式に関しては，$n$ が偶数の場合と奇数の場合に分けて考えよ）．したがって，$c_n < 0, n \ge 1$, に注意して，

$$\begin{aligned}\langle \Psi, B\Psi\rangle &= \langle \Psi, \Psi\rangle - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|\langle \Psi, (I - A)^n\Psi\rangle \\ &\ge \|\Psi\|^2(1 - \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|) \\ &= \|\Psi\|^2 f(1) = 0.\end{aligned}$$

ゆえに，$B \ge 0$.

級数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ $(|z| \le 1)$ は絶対収束なので，

$$1 - z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

と書き直せる．ただし，$d_k = \sum_{n+m=k,n,m\ge 0} c_n c_m$．したがって，$d_0 = 1, d_1 = -1, d_k = 0, k \ge 2$．ゆえに，

$$B^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (I-A)^n\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (I-A)^k = I - (I-A) = A.$$

$AC = CA, C \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$, とすれば，$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ における積の連続性により，$CB = \sum_{n=0}^{\infty} c_n C(I-A)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (I-A)^n C = BC$．したがって，$B$ は，A と可換な任意の有界演算子と可換である．

最後に，B の一意性を示そう．$(B')^2 = A$ となる $B' \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}), B' \ge 0$, があったとしよう．このとき，$B'A = (B')^3 = AB'$．したがって，$B$ と B' は可換である．上の結果から，$C^2 = B, (C')^2 = B'$ となる非負の自己共役演算子 $C, C' \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ が存在する．任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\Phi = (B - B')\Psi$ とおくと，

$$\|C\Phi\|^2 + \|C'\Phi\|^2 = \langle \Phi, [B(B-B') + B'(B-B')]\Psi\rangle = \langle \Phi, [B^2 - (B')^2]\Psi\rangle = 0.$$

したがって，$C\Phi = 0, C'\Phi = 0$．これから，$0 = C^2\Phi = B(B-B')\Psi, 0 = (C')^2\Phi = B'(B-B')\Psi$．辺々引くと，$(B-B')^2\Psi = 0$．これと Ψ との内積をとり，$B - B'$ の対称性を使えば，$\|(B-B')\Psi\|^2 = 0$ が得られる．したがって，$(B-B')\Psi = 0$．これはすべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して成立するから，$B = B'$ である． □

上の補題の演算子 B を A の**平方根** (square root) といい，$B = \sqrt{A} = A^{1/2}$ のように記す．

K をヒルベルト空間とする．任意の有界演算子 $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ に対して，A^*A は H 上の非負の有界自己共役演算子であるから，その平方根

$$|A| := \sqrt{A^*A} \tag{2.103}$$

が定義される．これを A の**絶対値** (absolute value, modulus) という．

例 2.19 F を $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数で（ルベーグ測度に関して）本質的に有界な関数とする．このとき，ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ において，F によるかけ算演算子 M_F は有界である．

(i) $F \geq 0$ としよう．このとき，関数 $\sqrt{F}$ も非負で本質的に有界であるから，$M_{\sqrt{F}}$ も有界演算子であり，$M_{\sqrt{F}}^2 = M_F$ が成り立つ．したがって，$M_{\sqrt{F}} = \sqrt{M_F}$ である．

(ii) 容易にわかるように，$M_F^* M_F = M_{|F|^2}$．したがって，(i) によって，$|M_F| = M_{|F|}$．

2.6.3 極　分　解

複素数 z の極形式の偏角の部分 $e^{i\,\mathrm{Arg}\,z}$ に対応する演算子版を定義するためにある概念を導入する．

有界演算子 $U \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ が，任意の $\Psi \in (\ker U)^\perp$ に対して，$\|U\Psi\|_{\mathsf{K}} = \|\Psi\|_{\mathsf{H}}$ をみたすとき，U を**部分等長演算子** (partial isometry) または**部分等距離演算子**という．この場合，$(\ker U)^\perp$ を U の**始空間** (initial subspace)，$\mathsf{R}(U)$ を**終空間** (final subspace) という．$\mathsf{R}(U)$ は閉であることに注意しよう．次の事実は基本的である．

命題 2.57

(i) U を H から K への部分等長演算子とする．P_{i}, P_{f} を，それぞれ，始空間，終空間への射影演算子とする．このとき，U^* も部分等長演算子であり，

$$U^*U = P_{\mathrm{i}}, \quad UU^* = P_{\mathrm{f}},$$

が成立する．

(ii) 逆に，演算子 $U \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ について，U^*U が射影演算子ならば，U は部分等長演算子である．

証明 (i) 1 章演習問題 1(iv) の偏極恒等式における Ψ, Φ として，それぞれ，$UP_{\mathrm{i}}\Psi$, $UP_{\mathrm{i}}\Phi$ をとると $(\Psi, \Phi \in \mathsf{H})$，$\langle UP_{\mathrm{i}}\Psi, UP_{\mathrm{i}}\Phi\rangle = \langle P_{\mathrm{i}}\Psi, P_{\mathrm{i}}\Phi\rangle = \langle \Psi, P_{\mathrm{i}}\Phi\rangle$．

一方，$\mathsf{R}(U^*) \perp \ker U$ であるから，左辺は，

$$\langle P_{\mathrm{i}}\Psi, U^*UP_{\mathrm{i}}\Phi\rangle = \langle \Psi, U^*UP_{\mathrm{i}}\Phi\rangle = \langle U^*U\Psi, P_{\mathrm{i}}\Phi\rangle = \langle U^*U\Psi, \Phi\rangle = \langle \Psi, U^*U\Phi\rangle$$

と変形できる．$\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ は任意であるから，$U^*U = P_{\mathrm{i}}$ を得る．

$(\ker U^*)^{\perp} = \mathsf{R}(U)$ であるから（補題 2.37(ii) による），任意の $\Phi \in (\ker U^*)^{\perp}$ に対して，$\Phi = U\Psi$ となる $\Psi \in \mathsf{H}$ が存在する．したがって，

$$\begin{aligned}\|U^*\Phi\|^2 &= \|U^*U\Psi\|^2 = \|P_{\mathrm{i}}\Psi\|^2 \\ &= \langle \Psi, P_{\mathrm{i}}\Psi\rangle = \langle \Psi, U^*U\Psi\rangle \\ &= \|U\Psi\|^2 = \|\Phi\|^2.\end{aligned}$$

ゆえに，U^* は部分等長演算子である．$(\ker U^*)^{\perp} = \mathsf{R}(U)$ であるから，U^* の始空間は，U の終空間である．したがって，前段の結果により，$UU^* = (U^*)^*U^* = P_{\mathrm{f}}$．

(ii) $U^*U = P$ とおくと，仮定により，P は射影演算子である．明らかに，$\ker U = \mathsf{R}(P)^{\perp}$ であるから，$(\ker U)^{\perp} = \overline{\mathsf{R}(P)} = \mathsf{R}(P)$．したがって，$\Psi \in (\ker U)^{\perp}$ ならば，$P\Psi = \Psi$ だから，$\|U\Psi\|^2 = \langle \Psi, P\Psi\rangle = \|\Psi\|^2$．したがって，$U$ は部分等長演算子である． □

定理 2.58 $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ とする．このとき，部分等長演算子 $U : \mathsf{H} \to \mathsf{K}$ が存在して，$A = U|A|$ と表わされる．さらに，$\mathsf{R}(U) = \overline{\mathsf{R}(A)}$ である．そのような部分等長演算子 U で $\ker U = \ker A$ をみたすものは存在し，一意的に定まる．

証明 任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\|A\Psi\|^2 = \langle \Psi, A^*A\Psi\rangle = \langle \Psi, |A|^2\Psi\rangle = \|\,|A|\Psi\,\|^2. \tag{2.104}$$

これは

$$\ker A = \ker |A| \tag{2.105}$$

を意味する．特に，$|A|\Psi_1 = |A|\Psi_2$ $(\Psi_1, \Psi_2 \in \mathsf{H})$ ならば，$A\Psi_1 = A\Psi_2$．ゆえに，対応 : $|A|\Psi \to A\Psi, \Psi \in \mathsf{H}$, は $\mathsf{R}(|A|)$ から $\mathsf{R}(A)$ への写像を定める．こ

の写像を U_0 とする：$U_0(|A|\Psi) := A\Psi$．(2.104) によって，U_0 は等長演算子であり，全射である．U_0 はヒルベルト空間 $\overline{\mathsf{R}(|A|)}$ からヒルベルト空間 $\overline{\mathsf{R}(A)}$ への，稠密に定義された有界線形演算子とみることができる．したがって，拡大定理（1 章定理 1.31) によって，U_0 は $\overline{\mathsf{R}(|A|)}$ から $\overline{\mathsf{R}(A)}$ の上への等長演算子に一意的に拡大される．この拡大も同じ記号 U_0 で表わす．$\overline{\mathsf{R}(|A|)}$ への射影演算子を P とし，H 上の演算子 U を $U = U_0P$ によって定義する．このとき，$\ker U = \overline{\mathsf{R}(|A|)}^\perp$ であるから，$(\ker U)^\perp = \overline{\mathsf{R}(|A|)}$．したがって，$U$ は部分等長演算子であり，$\mathsf{R}(U) = \overline{\mathsf{R}(A)}$ である．$|A|$ は自己共役であるから，補題 2.37(ii) の応用によって，$\ker|A| = \overline{\mathsf{R}(|A|)}^\perp = \ker U$．したがって，$\ker A = \ker U$．ゆえに，$A = U|A|$ が成立する．

部分等長演算子 W で $A = W|A|$, $\ker W = \ker A$ をみたすものがあったとすると，$(U-W)|A| = 0$．これは，$\mathsf{R}(|A|)$ 上で $U = W$ を意味する．したがって，$\overline{\mathsf{R}(|A|)}$ 上で $U = W$．一方，(2.105) によって，$\ker|A|$ 上では，$U = 0 = W$．$\mathsf{H} = \ker|A| \bigoplus \overline{\mathsf{R}(|A|)}$ であるから，$U = W$ を得る．ゆえに，U の一意性に関する主張がでる． □

上の定理の表示 $A = U|A|$ を A の**極分解** (polar decomposition) という．$\ker U = \ker A$ をみたすときの極分解（これは一意的）を**標準極分解**という．

注意 $\ker A \neq \{0\}$ をみたす $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$ の極分解 $A = U|A| \cdots (*)$ においては，U は一意的には決まらない．実際，$(\ker A)^\perp = (\ker|A|)^\perp = \overline{\mathsf{R}(|A|)}$ であるから，$\ker A$ への射影演算子を P とすれば，$P|A| = 0$．したがって，$\ker A$ から $\ker A$ への任意の有界演算子 V に対して，$VP|A| = 0$．ゆえに，$U' = U + VP$ すれば，$A = U'|A| \cdots (**)$．$U^*VP = 0$ に注意すると，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\|U'\Psi\|^2 = \|U\Psi\|^2 + \|VP\Psi\|^2 \qquad (***)$$

であることがわかる．さて，$(*)$ において，$\ker U = \ker A$ がみたされるとしよう（すなわち，$(*)$ を A の標準極分解とする）．このとき，$(***)$ から，$\ker U' = \ker V \subset \ker A$ がわかる．したがって，任意の $\Psi \in (\ker U')^\perp = (\ker V)^\perp \supset (\ker A)^\perp = (\ker U)^\perp$ に対して，$\|U'\Psi\| = \|U\Psi\| = \|\Psi\|$．ゆえに，$U'$ は部分等長演算子である．よって，$(**)$ は，A に対する極分解である．$\ker U' = \ker A$ という条件を課すと，$V = 0$ となって，$U' = U$ が導かれる．すなわち，極分解は一意的に定まる．

例 2.20 $\mathbb{R}^d$ 上の（ルベーグ測度に関して）本質的に有界なボレル可測関数 F によるかけ算演算子 M_F の極分解を求めよう．まず，例 2.19(ii) により，$|M_F| = M_{|F|}$ に注意する．$F(x) \neq 0$ のとき，$F(x) = e^{i\mathrm{Arg}\,F(x)}|F(x)|$ と書ける（$\mathrm{Arg}\,z \in [0, 2\pi)$ は 複素数 z の偏角）．$N_F := \{x \in \mathbb{R}^d |\, F(x) = 0\}$ とおけば，

$$\ker M_F = \{f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d) | \mathrm{supp}\, f \subset N_F\}$$

が成り立つ．$\ker M_F$ への射影演算子を P_F とすれば，例 2.15 によって，$P_F f = \chi_{N_F} f$, $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ （$|N_f| = 0$ ならば，$P_F = 0$ である）．任意の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned}(M_F f)(x) &= F(x)\chi_{N_F^c}(x) f(x) = e^{i\mathrm{Arg}\,F(x)}\chi_{N_F^c}(x)|F(x)|f(x) \\ &= e^{i\mathrm{Arg}\,F(x)}\chi_{N_F^c}(x)(M_{|F|}f)(x) \\ &= \chi_{N_F^c}(x) e^{i\mathrm{Arg}\,F(x)}\chi_{N_F^c}(x)(|M_F|f)(x).\end{aligned}$$

したがって，$U_F = (I - P_F)M_{\exp(i\mathrm{Arg}\,F)}(I - P_F)$ とおけば，$\ker U_F = \ker M_F$ であり，U_F は部分等長演算子であることがわかる．さらに，上の式から，$M_F = U_F|M_F|$ が成立する．これは M_F の標準極分解である．上の注意によって，$\ker M_F$ から $\ker M_F$ への任意の有界演算子 B に対して，$U_{F,B} = U + BP_F$ とおけば，これも部分等長演算子であり，$M_F = U_{F,B}|M_F|$ が成立する．

2.6.4 演算子の簡約

A が自己共役の場合，A の極分解は，A のもつ重要な構造を明らかにする．だが，このことを述べるには言葉の準備が少し必要である．

M を H の閉部分空間とし，M への射影演算子を P_M とする．A を H 上の演算子とする．任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$P_\mathsf{M}\Psi \in \mathsf{D}(A)$ であり，かつ $AP_\mathsf{M}\Psi = P_\mathsf{M}A\Psi$ が成り立つとき，M は A を**簡約する** (reduce) あるいは単に**約す**という．このことを演算子だけの言葉で述べれば，

$$P_\mathsf{M} A \subset AP_\mathsf{M} \tag{2.106}$$

ということである．

容易にわかるように，(2.106) が成り立つことは

$$(I - P_{\mathsf{M}})A \subset A(I - P_{\mathsf{M}}) \tag{2.107}$$

が成り立つことと同値である．$I - P_{\mathsf{M}}$ は $\mathsf{M}^{\perp}$ への射影演算子であるから，結局，M が A を約すことと $\mathsf{M}^{\perp}$ が A を約すことは同値である．

M が A を約すとしよう．このとき，$\Psi \in \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{M}$ ならば，$A\Psi = AP_{\mathsf{M}}\Psi = P_{\mathsf{M}}A\Psi \in \mathsf{M}$ であるから，ヒルベルト空間 M 上の演算子 A_{M} を次のように定義できる：

$$\mathsf{D}(A_{\mathsf{M}}) = \mathsf{D}(A) \cap \mathsf{M}, \tag{2.108a}$$

$$A_{\mathsf{M}}\Psi = A\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}}). \tag{2.108b}$$

演算子 A_{M} を $\boldsymbol{A}$ **の** M **における部分**という．この演算子に関する次の事実は基本的である．

命題 2.59　M が A を約すとする．このとき，次の (i)〜(v) が成り立つ．

(i)　A が閉ならば A_{M} も閉である．

(ii)　$\mathsf{D}(A)$ が H で稠密ならば，$\mathsf{D}(A_{\mathsf{M}})$ は M で稠密である．この場合，M は A^* を約し，

$$(A^*)_{\mathsf{M}} = (A_{\mathsf{M}})^* \tag{2.109}$$

が成り立つ．

(iii)　A がユニタリならば，A_{M} はユニタリである．

(iv)　A が自己共役ならば，A_{M} は自己共役である．

(v)　スペクトルについて次が成立する：

$$\sigma_{\mathrm{p}}(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A_{\mathsf{M}}) \cup \sigma_{\mathrm{p}}(A_{\mathsf{M}^{\perp}}) \tag{2.110}$$

$$\sigma(A) = \sigma(A_{\mathsf{M}}) \cup \sigma(A_{\mathsf{M}^{\perp}}). \tag{2.111}$$

証明　(i) $\Psi_n \in \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}}), \Psi_n \to \Psi \in \mathsf{M}$, $A_{\mathsf{M}}\Psi_n \to \Phi \in \mathsf{M}$ $(n \to \infty)$, とする．このとき，$\Psi_n \in \mathsf{D}(A)$ であり，$A\Psi_n = A_{\mathsf{M}}\Psi_n \to \Phi$ $(n \to \infty)$．したがって，

A の閉性により，$\Psi \in \mathsf{D}(A), A\Psi = \Phi$．ゆえに，$\Psi \in \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}}), A_{\mathsf{M}}\Psi = \Phi$．よって，$A_{\mathsf{M}}$ は閉である．

(ii) $\mathsf{D}(A)$ が稠密であるとする．$\Phi \in \mathsf{M}, \Phi \in \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}})^{\perp}$ とすれば，すべての $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\langle \Phi, P_{\mathsf{M}}\Psi \rangle = 0$．左辺は $\langle P_{\mathsf{M}}\Phi, \Psi \rangle = \langle \Phi, \Psi \rangle$ と変形でき，$\mathsf{D}(A)$ は稠密であるから，$\Phi = 0$ でなければならない．したがって，$\mathsf{D}(A_{\mathsf{M}})$ は稠密である．

(2.106) によって，$(AP_{\mathsf{M}})^* \subset (P_{\mathsf{M}}A)^*$．一方，命題 2.2(ii) によって，

$$(AP_{\mathsf{M}})^* \supset P_{\mathsf{M}}A^*, \quad (P_{\mathsf{M}}A)^* = A^*P_{\mathsf{M}}.$$

したがって，$P_{\mathsf{M}}A^* \subset A^*P_{\mathsf{M}}$．ゆえに，$\mathsf{M}$ は A^* を約す．任意の $\Psi \in \mathsf{D}((A_{\mathsf{M}})^*) \subset \mathsf{M}$ と $\Phi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$P_{\mathsf{M}}\Psi = \Psi, P_{\mathsf{M}}(A_{\mathsf{M}})^*\Psi = (A_{\mathsf{M}})^*\Psi$ を用いると，

$$\begin{aligned}\langle (A_{\mathsf{M}})^*\Psi, \Phi \rangle &= \langle P_{\mathsf{M}}(A_{\mathsf{M}})^*\Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, A_{\mathsf{M}}P_{\mathsf{M}}\Phi \rangle \\ &= \langle \Psi, AP_{\mathsf{M}}\Phi \rangle \\ &= \langle \Psi, P_{\mathsf{M}}A\Phi \rangle = \langle \Psi, A\Phi \rangle\end{aligned}$$

と変形できる．したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*) \cap \mathsf{M} = \mathsf{D}((A^*)_{\mathsf{M}})$ かつ $(A^*)_{\mathsf{M}}\Psi = A^*_{\mathsf{M}}\Psi$．ゆえに，$A^*_{\mathsf{M}} \subset (A^*)_{\mathsf{M}}$．逆に，$\Psi \in \mathsf{D}((A^*)_{\mathsf{M}})$ とすれば，任意の $\Phi \in \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}})$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle (A^*)_{\mathsf{M}}\Psi, \Phi \rangle &= \langle A^*\Psi, \Phi \rangle = \langle \Psi, A\Phi \rangle \\ &= \langle \Psi, A_{\mathsf{M}}\Phi \rangle.\end{aligned}$$

したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A^*_{\mathsf{M}})$ かつ $A^*_{\mathsf{M}}\Psi = (A^*)_{\mathsf{M}}$．ゆえに，(2.109) が成立する．

(iii) A がユニタリならば，$A^*A = I, AA^* = I$ であるから，(ii) によって，

$$A^*_{\mathsf{M}}A_{\mathsf{M}} = (A^*)_{\mathsf{M}}A_{\mathsf{M}} = (A^*A)_{\mathsf{M}} = I_{\mathsf{M}}.$$

同様に，$A_{\mathsf{M}}A^*_{\mathsf{M}} = I_{\mathsf{M}}$ が示される．したがって，A_{M} はユニタリである．

(iv) これは (ii) を応用すればよい．

(v) 任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，

$$A - \lambda = (A_{\mathsf{M}} - \lambda)P_{\mathsf{M}} + (A_{\mathsf{M}^{\perp}} - \lambda)P_{\mathsf{M}^{\perp}}$$

と書ける．したがって，

$$\|(A-\lambda)\Psi\|^2 = \|(A_{\mathsf{M}}-\lambda)P_{\mathsf{M}}\Psi\|^2 + \|(A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda)P_{\mathsf{M}^\perp}\Psi\|^2.$$

これから，$A-\lambda$ が単射であることと $A_{\mathsf{M}}-\lambda$ および $A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda$ が単射であることとは同値である．したがって，$A-\lambda$ が単射でないことと $A_{\mathsf{M}}-\lambda$ または $A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda$ が単射でないことは同値である．したがって，(2.110) が成立する．

(2.111) を示すために，$\lambda \in \varrho(A)$ とする．このとき，前段に述べた事柄により，$A_{\mathsf{M}}-\lambda$ と $A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda$ は単射である．$(A-\lambda)^{-1}$ の有界性により，$C = \|(A-\lambda)^{-1}\|^{-1} > 0$ とすれば，$\|(A-\lambda)\Psi\| \geq C\|\Psi\|, \Psi \in \mathsf{D}(A)$．これは，

$$\|(A_{\mathsf{M}}-\lambda)\Psi\| \geq C\|\Psi\|, \Psi \in \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}}),$$
$$\|(A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda)\Phi\| \geq C\|\Phi\|, \Phi \in \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}^\perp}),$$

を意味する．したがって，$(A_{\mathsf{M}}-\lambda)^{-1}$，$(A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda)^{-1}$ は有界である．任意の $\Phi \in \mathsf{M}$ に対して，$\mathsf{R}(A-\lambda)$ の稠密性により，$(A-\lambda)\Psi_n \to \Phi$ となる $\{\Psi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A)$ がある．このとき，$P_{\mathsf{M}}\Psi_n \in \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}})$ であり，両辺に P_{M} を作用させると，$(A_{\mathsf{M}}-\lambda)P_{\mathsf{M}}\Psi_n \to \Phi$ を得る．したがって，$\mathsf{R}(A_{\mathsf{M}}-\lambda)$ は M で稠密である．同様に，$\mathsf{R}(A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda)$ は $\mathsf{M}^\perp$ で稠密であることがわかる．よって，$\lambda \in \varrho(A_{\mathsf{M}}) \cap \varrho(A_{\mathsf{M}^\perp})$．ゆえに，$\varrho(A) \subset \varrho(A_{\mathsf{M}}) \cap \varrho(A_{\mathsf{M}^\perp})$．

逆に，$\lambda \in \varrho(A_{\mathsf{M}}) \cap \varrho(A_{\mathsf{M}^\perp})$ とすれば，$A_{\mathsf{M}}-\lambda$ と $A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda$ は単射である．したがって，$A-\lambda$ は単射である．また，いまの場合，$(A_{\mathsf{M}}-\lambda)^{-1}$ と $(A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda)^{-1}$ は有界であるから，$C_1 = \|(A_{\mathsf{M}}-\lambda)^{-1}\|^{-1}, C_2 = \|(A_{\mathsf{M}}-\lambda)^{-1}\|^{-1}$ とおけば，

$$\begin{aligned}\|(A-\lambda)\Psi\|^2 &= \|(A_{\mathsf{M}}-\lambda)\Psi_{\mathsf{M}}|^2 + \|(A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda)\Psi_{\mathsf{M}^\perp}|^2 \\ &\geq C_1^2\|\Psi_{\mathsf{M}}|^2 + C_2^2\|\Psi_{\mathsf{M}^\perp}\|^2 \\ &\geq C^2\|\Psi\|^2.\end{aligned}$$

ここで，$C = \min\{C_1, C_2\} > 0$ である．したがって，$(A-\lambda)^{-1}$ は有界である．

任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，$\mathsf{R}(A_{\mathsf{M}}-\lambda), \mathsf{R}(A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda)$ の稠密性により，

$$(A_{\mathsf{M}}-\lambda)\Xi_n \to \Phi_{\mathsf{M}},\ (A_{\mathsf{M}^\perp}-\lambda)\Theta_n \to \Phi_{\mathsf{M}^\perp}\ (n \to \infty)$$

となる $\{\Xi_n\}_n \subset \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}}), \{\Theta_n\}_n \subset \mathsf{D}(A_{\mathsf{M}^\perp})$ がとれる．そこで，$\Psi_n = \Xi_n + \Theta_n$ とおけば，$\Psi_n \in \mathsf{D}(A)$ であり，

$$(A-\lambda)\Psi_n \to \Phi_{\mathsf{M}} + \Phi_{\mathsf{M}^\perp} = \Phi \ (n \to \infty).$$

したがって，$\mathsf{R}(A-\lambda)$ は H で稠密である．ゆえに，$\lambda \in \varrho(A)$．以上から，$\varrho(A) = \varrho(A_{\mathsf{M}}) \cap \varrho(A_{\mathsf{M}^\perp})$ が示されたことになるので (2.111) が成立する．□

注意　ヒルベルト空間 H 上の線形演算子 A と閉部分空間 $\mathsf{M} \subset \mathsf{H}$ について，任意の $\Psi \in \mathsf{M} \cap \mathsf{D}(A)$ に対して，$A\Psi \in \mathsf{M}$ のとき，A は M 上に**制限可能**であるという．A が M によって約されるならば，上に見たように，A は M と $\mathsf{M}^\perp$ 上に制限可能である．しかし，A が非有界の場合，この逆は一般には成立しない．つまり，A が M と $\mathsf{M}^\perp$ 上に制限可能であっても，A は M によって約されるとは限らないのである．これも非有界演算子を扱う場合に注意しなければならない重要な事柄のひとつである．

反例　$\mathsf{L}^2(\mathbb{R})$ において，微分演算子 $D_0 = d/dx$, $\mathsf{D}(D_0) := \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R})$, を考える．これは非有界である（例 1.34(ii) を参照）．$\mathsf{M} = \{f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) |\ \mathrm{supp}\, f \subset [0,1]\}$ とする．このとき，明らかに，D_0 は M と $\mathsf{M}^\perp = \{f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}) |\ \mathrm{supp}\, f \subset (-\infty,0) \cup (1,\infty)\}$ 上に制限可能である（$\because$ 微分演算は台特性を変えない）．しかし，$\mathsf{D}(D_0)$ の元 f で，$x=0$ または $x=1$ の近傍で 0 でないものについては，f の M への正射影 $P_{\mathsf{M}} f = \chi_{[0,1]} f$ は $\mathsf{D}(D_0)$ に属さない．

2.6.5　有界な自己共役演算子の標準極分解

定理 2.60　$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ を自己共役とし，$A = U|A|$ をその標準極分解とする（したがって，$\ker U = \ker A$）．このとき，以下の (i)〜(iv) が成立する：

(i)

$$\mathsf{R}(A) = \mathsf{R}(|A|), \tag{2.112}$$

$$U = U^*. \tag{2.113}$$

(ii)　U は，A と可換な任意の有界演算子と可換である．

(iii)　A を約し，互いに直交する閉部分空間 $\mathsf{M}_\pm$ で，$\mathsf{M}_\pm \perp \ker A$,

$$\mathsf{H} = \mathsf{M}_+ \bigoplus \mathsf{M}_- \bigoplus \ker A, \tag{2.114}$$

$$A_{\mathsf{M}_+} \geq 0, \quad A_{\mathsf{M}_-} \leq 0, \tag{2.115}$$

をみたすものが存在する．

(iv) (iii) における，H の直交分解は次の意味で一意的である：M' が A を約する閉部分空間であり，$\mathsf{M}' \perp \ker A$, すべての $\Psi \in \mathsf{M}'$ に対して，$\langle \Psi, A\Psi \rangle \geq 0$ ($\langle \Psi, A\Psi \rangle \leq 0$) をみたすならば，$\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}_-^\perp$ ($\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}_+^\perp$).

証明 (i) $A = U|A|$ の共役をとり，A の自己共役性を用いると，

$$A = |A|U^* \tag{2.116}$$

したがって，$\mathsf{R}(A) \subset \mathsf{R}(|A|)$. $C = U|A|U^*$ とおくと，C は自己共役であり，$C \geq 0$ である．さらに，U の部分等長性と (2.116) を用いると，

$$C^2 = U|A|U^*U|A|U^* = U|A|\,|A|U^* = A^2.$$

非負の自己共役演算子の平方根の一意性によって，$C = |A|$ である．したがって，

$$|A| = U|A|U^* = AU^*. \tag{2.117}$$

これから，特に，$\mathsf{R}(|A|) \subset \mathsf{R}(A)$ がわかる．ゆえに，(2.112) を得る．

U の部分等長性と (2.117) の 1 番目の等式によって，$U^*|A| = |A|U^*$. これと (2.116) によって，$A = U^*|A|$. U^* は部分等長演算子であるから，これは，A のひとつの極分解である．ところで，$\ker U^* = \mathsf{R}(U)^\perp = \mathsf{R}(A)^\perp$. A は自己共役であるから，$\mathsf{R}(A)^\perp = \ker A$. したがって，$\ker U^* = \ker A$. これと極分解の一意性により，(2.113) を得る．

(ii) $U|A| = A = A^* = |A|U^* = |A|U$ であるから，$|A|$ と U は可換．また，$AU = |A| = UA$ であるから，A も U と可換である．$B \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$, $AB = BA$ としよう．このとき，B は A^2 と可換である．A^2 の平方根は $|A|$ であるから，補題 2.56 によって，B は $|A|$ と可換．したがって，

$$BU|A| = BA = AB = U|A|B = UB|A|.$$

これは，$\mathsf{R}(|A|)$ 上では，$UB = BU$ を意味する．任意の $\Psi \in \ker |A| = \ker A$ に対して，$|A|UB\Psi = AB\Psi = BA\Psi = 0$. したがって，$UB\Psi \in \ker |A| = \ker A$. 他方，$UB\Psi \in \mathsf{R}(U) = (\ker U^*)^\perp = (\ker U)^\perp = (\ker A)^\perp$. したがって，

$UB\Psi = 0$．また，$\ker U = \ker A$ であるから，$BU\Psi = 0$ は自明．よって，$\ker A = \ker |A|$ 上でも $UB = BU$ が成り立つ．$\ker |A| = \mathsf{R}(|A|)^\perp$ であるから，以上から，$UB = BU$ が得られる．

(iii) $\mathsf{M} := \overline{\mathsf{R}(A)}$ $(= \overline{\mathsf{R}(|A|)})$ としよう．このとき，補題 2.37(ii) によって，$\mathsf{H} = \mathsf{M} \bigoplus \ker A$．任意の $\Psi \in \mathsf{M}$ に対して，$U^2\Psi = U^*U\Psi = \Psi$．また，$U\Psi = 0, \Psi \in \mathsf{M}^\perp$．したがって，$P_\pm = (I \pm U)/2$ とおくと，$P_\pm$ は，M における，互いに直交する射影演算子であり，M 上で，$P_+ + P_- = I_{\mathsf{M}}, UP_\pm = \pm P_\pm$ が成立する．したがって，$\mathsf{M}_\pm = \mathsf{R}(P_\pm)$ とおけば，(2.114) が成立する．H においては，$\mathsf{M}_\pm, \ker A$ への射影演算子は，それぞれ，$P_\pm = (U^2 \pm U)/2, P_0 = I - U^2$ によってあたえられる．$A, |A|$ は U と可換であるから，$A, |A|$ は $P_\pm, P_0$ と可換である．したがって，$\mathsf{M}_\pm, \ker A$ は A を約する（いまの場合，$A, |A|$ は有界演算子であるから，定義域に関する問題は生じない）．

任意の $\Psi \in \mathsf{M}_+$ に対して，$A\Psi = U|A|\Psi = |A|U\Psi = |A|\Psi$．したがって，$A_{\mathsf{M}_+} \geq 0$．同様に，任意の $\Psi \in \mathsf{M}_-$ に対して，$A\Psi = -|A|\Psi$ であるから，$A_{\mathsf{M}_-} \leq 0$．

(iv) F を M' への射影演算子とする．M' は A を約するので，F と A は可換である．したがって，この命題の (ii) によって，F は U と可換であるから，F は $P_\pm, P_0$ と可換である．

ゆえに，$FP_- = P_-F$ は射影演算子であり，任意の $\Psi \in FP_-\mathsf{H}$ に対して，仮定により，$\langle \Psi, A\Psi \rangle \geq 0$．しかし，$FP_- = P_-F$ であるから，$\langle \Psi, A\Psi \rangle \leq 0$．ゆえに，$\langle \Psi, A\Psi \rangle = 0$．これは，$A = U|A|$ と $UP_- = -P_-$ によって，$\langle \Psi, |A|\Psi \rangle = 0$ を意味する．したがって，$\| |A|^{1/2}\Psi \|^2 = 0$．ゆえに，$\Psi \in \ker |A|^{1/2}$．一方，$\ker |A|^{1/2} = \ker |A| = \ker A$ を示すのは容易である（$|A| = |A|^{1/2}|A|^{1/2}$, $\langle \Phi, |A|\Phi \rangle = \| |A|^{1/2}\Phi \|^2$, $\| |A|\Phi \| = \|A\Phi\|$, $\Phi \in \mathsf{H}$ を用いよ）．したがって，$\Psi \in \mathsf{M}_- \cap \ker A$ であるから，$\Psi = 0$．これは，$FP_- = P_-F = 0$ を意味する．したがって，$\mathsf{M}' \subset \mathsf{M}_-^\perp$．他の場合も同様． □

2.6.6 スペクトル定理—有界な自己共役演算子の場合

スペクトル定理の証明の鍵は，あたえられた自己共役演算子 A から，どのようにスペクトル族を構成するかという点にある．これをさぐるひとつの方法

は，スペクトル族 $\{E(\lambda)\}$ を用いて，A が (2.102) のように表わされたとしたとき，$E(\lambda)$ が，A から定まる何らかの演算子をを用いて，どのように表現されるかをあらかじめ見ることである．すでに見たように，A の極分解を司る部分等長演算子 U や絶対値 $|A|$ は A から一意的に定まる（ただし，U に関しては，$\ker U = \ker A$ という条件のもとで）．そこで，U や $|A|$ がスペクトル族を用いて，どのように表わされるかを調べてみよう．いま，簡単のため，A は有界であると仮定し，(2.102) が成立したとする（したがって，命題 2.53 によって，$\{E(\lambda)\}$ は有界）．定理 2.52 の証明と全く同様にして，任意の実数 λ に対して，

$$\langle \Psi, A_\lambda \Phi \rangle = \int_{\mathbb{R}} |\mu - \lambda| d\langle \Psi, E(\mu)\Psi \rangle, \quad \Psi, \Phi \in \mathsf{H}, \tag{2.118}$$

をみたす有界な自己共役演算子 A_λ が存在することが示される．容易にわかるように，$A_\lambda \geq 0$ であり，$A_\lambda^2 = (A-\lambda)^2$ が成立する．したがって，絶対値の一意性により，

$$A_\lambda = |A - \lambda| \tag{2.119}$$

また，

$$U(\lambda) = I - E(\lambda) - E(\lambda - 0) \tag{2.120}$$

とおけば，$U(\lambda)$ は自己共役である．これとスペクトル族の性質を用いると，任意の $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, U(\lambda) A_\lambda \Psi \rangle &= \int_{\mu<\lambda} |\mu - \lambda| d\langle [I - E(\lambda) - E(\lambda - 0)]\Phi, E(\mu)\Psi \rangle \\
&\quad + \int_{\mu>\lambda} |\mu - \lambda| d\langle [I - E(\lambda) - E(\lambda - 0)]\Phi, E(\mu)\Psi \rangle \\
&= -\int_{\mu<\lambda} (\lambda - \mu) d\langle \Phi, E(\mu)\Psi \rangle + \int_{\mu>\lambda} (\mu - \lambda) d\langle \Phi, E(\mu)\Psi \rangle \\
&= \langle \Phi, (A - \lambda)\Psi \rangle.
\end{aligned}$$

ここで，第 2 の等号を得るには，スティルチェス積分の有限近似和までさかのぼって考えなければならない．したがって，

$$A - \lambda = U(\lambda) A_\lambda = U(\lambda)|A - \lambda|.$$

これは $A-\lambda$ の極分解をあたえる．(2.120) から，

$$U(\lambda)^2 = I - E(\lambda) + E(\lambda - 0) = 1 - E(\{\lambda\}) \tag{2.121}$$

これは，$\mathsf{R}(U(\lambda)^2) = \mathsf{R}(I - E(\{\lambda\})) = \mathsf{R}(E(\{\lambda\}))^\perp$ を意味する．したがって，命題 2.54(ii) によって，$\ker(A-\lambda) = \overline{\mathsf{R}(U(\lambda)^2)}^\perp = \ker U(\lambda)^2$．ここで，補題 2.37(ii) と $U(\lambda)$ の自己共役性を用いた．$\ker U(\lambda)^2 = \ker U(\lambda)$ であるから，

$$\ker U(\lambda) = \ker(A - \lambda) \tag{2.122}$$

を得る．(2.120) と (2.121) から，

$$E(\lambda) = I - \frac{1}{2}[U(\lambda) + U(\lambda)^2] \tag{2.123}$$

こうして，$\{E(\lambda)\}_\lambda$ は $A-\lambda$ の極分解における部分等長演算子 $U(\lambda)$ で (2.122) をみたすものによって表わされる．(2.123) は，自己共役演算子 A に対して，(2.102) をみたすようなスペクトル族 $\{E(\lambda)\}_\lambda$ は一意的に定まることを示している．

上のことは，スペクトル定理の証明の方針のひとつを示唆する．すなわち，自己共役演算子 A があたえられたとき，$\{E(\lambda)\}$ を (2.123) によって定義し，これが然るべき性質をもつことを示すのである．以下では，有界な自己共役演算子の場合に，この方法でスペクトル定理を証明する．

定理 2.61　A を H 上の有界な自己共役演算子とする．このとき，スペクトル族 $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ がただひとつ存在して，(2.102) が成立する．この場合，

$$\operatorname{supp} E \subset [-\|A\|, \|A\|]. \tag{2.124}$$

注意　以下の証明をみればわかるように，(2.102) の右辺は，実は，$\mathfrak{B}(\mathsf{H})$ に値をとるスティルチェス積分として意味をもち，その積分は一様収束の意味（演算子ノルムの位相）で収束する．すなわち，a, b を条件 $a < -\|A\|$，$b > \|A\|$ をみたす任意の実数とすると，(2.84) の型の任意の分割 Π に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \|A - \sum_{\Pi\to 0} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [E(\lambda_k) - E(\lambda_{k-1})]\| = 0 \tag{2.125}$$

が成り立つ．このことを

$$A = \text{u-}\int_a^b \lambda \, dE(\lambda) = \text{u-}\int_{[a,b]} \lambda dE(\lambda) \tag{2.126}$$

と記す．

証明 （第1段）任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，$A - \lambda$ は有界な自己共役演算子である．この演算子の極分解を $A - \lambda = U(\lambda)|A - \lambda|$ とする．ただし，$\ker(A - \lambda) = \ker U(\lambda)$ とする．定理 2.60 によって，互いに直交する閉部分空間 $\mathsf{M}_\pm(\lambda)$ で，$\mathsf{M}_\pm(\lambda) \perp \ker(A - \lambda)$,

$$\mathsf{H} = \mathsf{M}_+(\lambda) \bigoplus \mathsf{M}_-(\lambda) \bigoplus \ker(A - \lambda),$$
$$A_{\mathsf{M}_+(\lambda)} \geq \lambda, \quad A_{\mathsf{M}_-(\lambda)} \leq \lambda,$$

をみたすものが存在する．$\mathsf{M}_\pm(\lambda)$, $\ker(A - \lambda)$ への射影演算子を，それぞれ，$P_\pm(\lambda)$, $P_0(\lambda)$ とし，

$$E(\lambda) := I - \frac{1}{2}\{U(\lambda) + U(\lambda)^2\} = I - P_+(\lambda) = P_-(\lambda) + P_0(\lambda) \tag{2.127}$$

とおく．まず，$\{E(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ はスペクトル族であることを示そう．

（第2段）$\mathsf{R}(E(\lambda)) = \mathsf{M}(\lambda)$ とおく．したがって，$\Psi \in \mathsf{M}(\lambda)$ ならば，$\langle \Psi, (A - \lambda)\Psi \rangle \leq 0$. 明らかに，$\mathsf{M}(\lambda)$ は A を約し，$\mu \geq \lambda$ ならば，$\langle \Psi, (A - \mu)\Psi \rangle \leq 0, \Psi \in \mathsf{M}(\lambda)$. したがって，定理 2.60(iv) から，$\mathsf{M}(\lambda) \subset \mathsf{M}_+(\mu)^\perp = \mathsf{R}(E(\mu)) = \mathsf{M}(\mu)$. したがって，$\{E(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ は射影演算子の非減少族である．ゆえに，$E(\pm\infty) := \text{s-}\lim_{\lambda \to \pm\infty} E(\lambda)$ は存在し，射影演算子である（命題 2.49(i) を参照）．A と $U(\lambda)$ は可換であるから，A は $E(\lambda)$ と可換，したがって，A は $E(\pm\infty)$ と可換である．$\lambda < -\|A\|$ とすれば，任意の $\Psi \in \mathsf{H}, \Psi \neq 0,$ に対して，

$$\langle \Psi, A\Psi \rangle + \|A\| \, \|\Psi\|^2 \geq \langle \Psi, A\Psi \rangle + |\langle \Psi, A\Psi \rangle| \geq 0.$$

i.e., $\langle \Psi, (A - \lambda)\Psi \rangle > 0$. ゆえに，定理 2.60(iv) によって，$P_-(\lambda) = 0, P_0(\lambda) = 0$. これは，$E(\lambda) = 0$ を意味する．ゆえに，$E(-\infty) = 0$. 同様にして，$\lambda > \|A\|$ ならば，$\langle \Psi, (A - \lambda)\Psi \rangle < 0, \Psi \in \mathsf{H}, \Psi \neq 0,$ が示されるので，$E(\lambda) = I$ を得

る．したがって，$E(\infty)=I$．以上から，$\{E(\lambda)\}$ は上にも下にも有界であり，(2.124) が成立する．

（第 3 段）$\lambda \to E(\lambda)$ の右連続性を示そう．$\lambda < \mu$ に対して，$E(\lambda,\mu] = E(\mu)-E(\lambda)$ と定義する．このとき，

$$E(\lambda,\mu]E(\mu)=E(\lambda,\mu]=E(\lambda,\mu](I-E(\lambda)).$$

また，$(A-\mu)E(\mu)\le 0, (A-\lambda)(I-E(\lambda))=(A-\lambda)P_+(\lambda)\ge 0$．したがって，

$$(A-\mu)E(\lambda,\mu]=E(\lambda,\mu](A-\mu)E(\mu)E(\lambda,\mu]\le 0$$

かつ

$$(A-\lambda)E(\lambda,\mu]=E(\lambda,\mu](A-\lambda)(I-E(\lambda))E(\lambda,\mu]\ge 0.$$

これらの不等式から，

$$\lambda E(\lambda,\mu]\le AE(\lambda,\mu]\le \mu E(\lambda,\mu]. \tag{2.128}$$

そこで，$\mu\to\lambda+0$ の強極限をとると

$$(A-\lambda)[E(\lambda+0)-E(\lambda)]=0$$

が得られる（命題 2.49(ii) によって，$\text{s-}\lim_{\mu\downarrow\lambda}E(\mu):=E(\lambda+0)$ は存在する）．これは，$[E(\lambda+0)-E(\lambda)]\mathsf{H}\subset\ker(A-\lambda)$ を意味する．したがって，特に，$P_+(\lambda)[E(\lambda+0)-E(\lambda)]=0$．ゆえに，$E(\lambda)[E(\lambda+0)-E(\lambda)]=E(\lambda+0)-E(\lambda)$．左辺は，$E(\lambda)-E(\lambda)=0$ に等しい．したがって，$E(\lambda+0)=E(\lambda)$．ゆえに，$E(\lambda)$ は右連続である．

（第 4 段）A が $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ に同伴する自己共役演算子であることを示そう．分割 Π を上の注意に述べられたものとする．このとき，(2.128) より，

$$\sum_{k=1}^n \lambda_{k-1}E(\lambda_{k-1},\lambda_k]\le A\sum_{k=1}^n E(\lambda_{k-1},\lambda_k]\le \sum_{k=1}^n \lambda_k E(\lambda_{k-1},\lambda_k].$$

この不等式のまんなかの演算子は A に等しい．$\lambda'_k \in (\lambda_{k-1}, \lambda_k], \Psi \in \mathsf{H}$ とすれば，上の不等式は，

$$
\begin{aligned}
&-\sum_{k=1}^{n}(\lambda'_k - \lambda_{k-1})\langle\Psi, E(\lambda_{k-1}, \lambda_k]\Psi\rangle \\
&\leq \langle\Psi, \left(A - \sum_{k=1}^{n}\lambda'_k E(\lambda_{k-1}, \lambda_k]\right)\Psi\rangle \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k - \lambda'_k)\langle\Psi, E(\lambda_{k-1}, \lambda_k]\Psi\rangle
\end{aligned}
$$

と書き換えられる．したがって，$|\Pi| = \max_k |\lambda_k - \lambda_{k-1}|$ とし，

$$\sum_{k=1}^{n} E(\lambda_{k-1}, \lambda_k] = I$$

を用いると，

$$-|\Pi|\,\|\Psi\|^2 \leq \langle\Psi, \left(A - \sum_{k=1}^{n}\lambda'_k E(\lambda_{k-1}, \lambda_k]\right)\Psi\rangle \leq |\Pi|\,\|\Psi\|^2.$$

この不等式は，

$$\left\|A - \sum_{k=1}^{n}\lambda'_k E(\lambda_{k-1}, \lambda_k]\right\| \leq |\Pi|$$

を意味する（章末演習問題3(i)を参照）．したがって，(2.125)が成立する．(2.125)は (2.102a), (2.102b) を意味する（いまの場合，$\mathrm{supp}\, E$ は有界であるから，(2.102a) は自明）．

$\{E(\lambda)\}$ の一意性については，すでに述べた通りである． □

非有界な自己共役演算子に対するスペクトル定理は，有界な自己共役演算子に対するスペクトル定理を利用することにより証明されるが，そのためには，なおもいくつかの準備をしなければならない．次の節でその準備を行なう．

2.7 スペクトル測度

この節では，スペクトル族の概念を一般化する．これは，非有界な自己共役演算子に対するスペクトル定理の証明に必要であるばかりでなく，純理論的に

も量子力学への応用上も重要である．

2.7.1 スペクトル測度

H をヒルベルト空間，$\mathcal{P}$(H) を H 上の射影演算子の全体，B^d を $\mathbb{R}^d$ のボレル集合全体（付録 A を参照）とする．B^d から $\mathcal{P}$(H) への写像 $E : \mathsf{B}^d \to \mathcal{P}(\mathsf{H})$（すなわち，各 $B \in \mathsf{B}^d$ に対し，H 上の射影演算子 $E(B)$ をただひとつ定める対応）が次の条件 (E.1)〜(E.3) をみたすとき，これを **d 次元のスペクトル測度** (spectral measure) あるいは**単位の分解**という[*16]：

(E.1) $E(\emptyset) = 0, \quad E(\mathbb{R}^d) = I.$

(E.2) $B = \cup_{n=1}^{\infty} B_n, B_n \cap B_m = \emptyset (n \neq m)$ $(B_n \in \mathsf{B}^d, n = 1, 2, \cdots,)$ ならば

$$E(B) = \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E(B_n).$$

ここで，s-lim は演算子の強収束を表わす（1 章 1.2 節 1.2.5 項を参照）．

(E.3) 任意の $B_1, B_2 \in B^d$ に対して，

$$E(B_1)E(B_2) = E(B_1 \cap B_2).$$

上の条件 (E.3) は，任意の $B_1, B_2 \in \mathsf{B}^d$ に対して $E(B_1)$ と $E(B_2)$ が可換であることを意味する．すなわち，スペクトル測度 $\{E(B)|B \in \mathsf{B}^d\}$ は可換な射影演算子の族になっている．(E.3) において，$B_1 \cap B_1 = \emptyset$ とすれば，$E(B_1)E(B_2) = 0$．すなわち，$E(B_1)$ と $E(B_2)$ は直交する．この性質を**スペクトル測度の直交性**という．

条件 (E.2) において，$B = \mathbb{R}^d$ の場合を考え，(E.1) を用いると

$$I = \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E(B_n). \tag{2.129}$$

しかも，この場合，$B_m \cap B_n = \emptyset (m \neq n)$ であるから，$E(B_m)E(B_n) = 0, m \neq n$ である．したがって，(2.129) は，単位演算子が互いに直交する射影演算子の和で書かれることを意味する．これが，$\{E(B)|B \in \mathsf{B}^d\}$ を単位の分解とよぶ所以である．

[*16] **射影演算子値測度** (projection-valued measure) ともいう．

$B, C \in \mathsf{B}^d, B \subset C$ ならば，$C = B \cup (C \setminus B), B \cap (C \setminus B) = \emptyset$ であるから，(E.2) を，$B_1 = B, B_2 = C \setminus B, B_n = \emptyset, n \geq 3,$ として応用すれば，$E(C) = E(B) + E(C \setminus B)$．一方，射影演算子の性質によって，任意の $D \in \mathsf{B}^d$ に対して，$E(D) \geq 0$．したがって，$E(B) \leq E(C)$．すなわち，

$$B \subset C \Longrightarrow E(B) \leq E(C). \tag{2.130}$$

これを**スペクトル測度の単調増加性**という．

通常の測度に対して，台の概念が定義された（付録 A を参照）．これと同様に，スペクトル測度に対しても台という概念が定義される：d 次元のスペクトル測度 $\{E(B)|B \in \mathsf{B}^d\}$ に対し，$E(B) = I$ となる最小の閉集合 B を E の**台**といい，$\mathrm{supp}\, E$ と記す．

例 2.21 H をヒルベルト空間，$\{P_n\}_{n=1}^N$ (N は高々可算）を H 上の 0 でない射影演算子の族で，$P_n P_m = 0,\ n \neq m,\ \sum_{n=1}^N P_n = I$ をみたすものとする ($N = \infty$ のときは，$\sum_{n=1}^\infty P_n := \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^N P_n$ とする）．$\Lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^N$ を実数の組とする．ただし，$m \neq n \Longleftrightarrow \lambda_m \neq \lambda_n$ とする．任意の 1 次元ボレル集合 $B \in \mathsf{B}^1$ に対して，H 上の演算子 $E(B)$ を

$$E(B) = \text{s-}\lim_{l\to\infty} \sum_{\lambda_n \in B \cap [-l,l]} P_n$$

によって定義する．ただし，$\sum_{\lambda_n \in C}$ は λ_n が C に属するような n についての和を表わす；もし，$C \cap \Lambda = \emptyset$ ならば，$E(C) = 0$ とする．このとき，$\{E(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ は 1 次元のスペクトル測度である．この事実を $N = \infty$ の場合に証明しよう ($N < \infty$ の場合も同様であるが，より容易）．

まず，(E.1) がみたされることは容易にわかる．任意の $B_1,\ B_2 \in \mathsf{B}^1$ と $\Psi, \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}
\langle \Psi, E(B_1)E(B_2)\Phi \rangle &= \langle E(B_1)\Psi, E(B_2)\Phi \rangle \\
&= \lim_{l\to\infty} \sum_{\lambda_k \in B_1 \cap [-l,l]} \sum_{\lambda_j \in B_2 \cap [-l,l]} \langle \Psi, P_k P_j \Phi \rangle \\
&= \lim_{l\to\infty} \sum_{\lambda_k \in (B_1 \cap B_2) \cap [-l,l]} \langle \Psi, P_k \Phi \rangle \\
&= \langle \Psi, E(B_1 \cap B_2)\Phi \rangle.
\end{aligned}$$

ゆえに，(E.3) が成立する．

集合 B_n を (E.2) のようにとると ($d=1$ の場合)

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} E(B_j) &= \lim_{l\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\lambda_k\in B_j\cap[-l,l]} P_k \\ &= \lim_{l\to\infty}\sum_{\lambda_k\in(\cup_{j=1}^n B_j)\cap[-l,l]} P_k \\ &= E(\cup_{j=1}^n B_j).\end{aligned}$$

これと (E.3) によって，

$$\left\| E(B)\Psi - \sum_{j=1}^{n} E(B_j)\Psi \right\|^2 = \langle \Psi, E\left(B\setminus \cup_{j=1}^n B_j\right)\Psi\rangle.$$

そこで，まず，$\Lambda\cap B$ が有限個の λ_n のみを含む場合を考える．このとき，n を十分大きくとれば，$\Lambda\cap(B\setminus\cup_{j=1}^n B_j) = \emptyset$．したがって，$\|E(B)\Psi - \sum_{j=1}^n E(B_j)\Psi\|^2 = 0$．ゆえに，(E.2) が成立する．次に，一般の場合を考える．$\Lambda_m = \{\lambda_k\}_{k=1}^m$ $(m<\infty)$ とおくと，$\Lambda_m\cap B$ に含まれる λ_n の数は有限であるから，いま得た結果が使える．すなわち，

$$E(\Lambda_m\cap B) = \text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} E(\Lambda_m\cap B_j).$$

これは，(E.3) によって，

$$E(\Lambda_m)E(B) = \text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} E(\Lambda_m)E(B_j) = E(\Lambda_m)\text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} E(B_j)$$

と書き換えられる．ここで，演算子 $E(\cdot)$ の有界性も用いた．そこで，

$$\text{s-}\lim_{m\to\infty} E(\Lambda_m) = \text{s-}\lim_{m\to\infty}\sum_{k=1}^{m} P_k = I$$

を使えば，(E.2) が得られる．

スペクトル測度 E の台を求めよう．明らかに，$E(\mathbb{R}\setminus\Lambda) = 0$ であるから，$E(\Lambda) = I$．Λ の集積点全体を D_Λ とすると，$\Lambda\cap D_\Lambda = \emptyset$, $I \geq E(\overline{\Lambda}) =$

$E(\Lambda)+E(D_\Lambda)=I+E(D_\Lambda)$ であるから，$E(D_\Lambda)=0$. したがって，$E(\overline{\Lambda})=I$. ゆえに，$\operatorname{supp}E=\overline{\Lambda}$.

例 2.22 ボレル集合 $B\in\mathsf{B}^d$ に対して，ヒルベルト空間 $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上の演算子 $E(B)$ を

$$(E(B)f)(x)=\chi_B(x)f(x),\quad f\in\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d),$$

によって定義する．ここで，χ_B は B の定義関数である．$E(B)$ は関数 χ_B によるかけ算演算子であり，これが射影演算子であることは容易に確かめられる．この演算子の族 $\{E(B)|B\in\mathsf{B}(\mathbb{R}^d)\}$ がスペクトル測度であることを示そう．

$E(\cdot)$ が上記の (E.1), (E.3) の性質を満たすことはほとんど明らかであろう．B,B_n を (E.2) のようにとると，

$$(E(B)f)(x)-\sum_{n=1}^{N}(E(B_n)f)(x)=\begin{cases}f(x) & x\in B\setminus\cup_{n=1}^{N}B_n\\ 0 & x\in\cup_{n=1}^{N}B_n.\end{cases}$$

したがって，

$$\left\|E(B)f-\sum_{n=1}^{N}E(B_n)f\right\|^2=\int_{B\setminus\cup_{n=1}^{N}B_n}|f(x)|^2dx.$$

$|f|^2$ は可積分であるから，この式の右辺は $N\to\infty$ とすれば 0 に収束する．したがって，(E.2) が証明された．

$\{E(B)|B\in\mathsf{B}^d\}$ をスペクトル測度としよう．このとき，各 $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して，

$$\mu_\Psi(B)=\langle\Psi,E(B)\Psi\rangle \tag{2.131}$$

とおけば，性質 (E.1)〜(E.3) によって，μ_Ψ は可測空間 $(\mathbb{R}^d,\mathsf{B}^d)$ 上の有界な測度になる．この測度による積分を $\int(\cdot)d\langle\Psi,E(\lambda)\Psi\rangle$ と書こう（付録 A を参

照)*17．$E(B)$ が射影演算子であることにより

$$\|E(B)\Psi\|^2 = \langle \Psi, E(B)\Psi \rangle \tag{2.132}$$

である．この事実に基づいて，ときには，$\int d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle$ を $\int d\|E(\lambda)\Psi\|^2$ とも書くことにする．

偏極恒等式 (2.55) を用いると

$$\langle \Psi, E(B)\Phi \rangle = \frac{1}{4}\{\mu_{\Psi+\Phi}(B) - \mu_{\Psi-\Phi}(B) - i\mu_{\Psi+i\Phi}(B) + i\mu_{\Psi-i\Phi}(B)\}, \quad \Psi, \Phi \in \mathsf{H}, \tag{2.133}$$

が成り立つから，$\langle \Psi, E(B)\Phi \rangle$ は $(\mathbb{R}^d, \mathsf{B}^d)$ 上の有界な複素測度になる．この測度による積分を $\int d\langle \Psi, E(\lambda)\Phi \rangle$ のように表わす．

例 2.23 H を 2.5.1 項で述べた演算子とし，$\mathbb{C}^n$ 上の演算子 $\tilde{E}_H(B), B \in \mathsf{B}^1$, を

$$\tilde{E}_H(B) = \sum_{\mu_j \in B} P_j$$

によって定義する．このとき，例 2.21 によって，$\{\tilde{E}_H(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ はスペクトル測度である．複素測度 $\langle z, \tilde{E}_H(\cdot)w \rangle$ $(z, w \in \mathbb{C}^n)$ の台は $\{\mu_j\}_{j=1}^s$ であり，$E_H(\{\mu_j\}) = P_j$ に注意すれば，(2.131) によって，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f と $z, w \in \mathbb{C}^n$ に対して，

$$\langle w, f(H)z \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle z, \tilde{E}_H(\lambda)w \rangle$$

が成立することがわかる．特に，$f(\lambda) = \lambda$ とすれば，

$$\langle w, Hz \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle z, \tilde{E}_H(\lambda)w \rangle.$$

*17 $d = 1$ の場合，これは，2.5 節で導入した，スペクトル族に関するスティルチェス積分と記号は同じであるが，概念的には異なるものである．以下の命題 2.62，定理 2.63 で示すように，任意の 1 次元スペクトル測度にはスペクトル族が同伴し，また，この逆も成立する．連続関数の積分に関しては，スペクトル族によるスティルチェス積分とスペクトル族に同伴するスペクトル測度による積分は同じ結果をあたえる．したがって，積分の意味さえきちんとおさえていれば，同じ記号を用いても混乱は生じない．

これは，H のスペクトル分解 (2.86) と同等である．$\tilde{E}_H$ と 2.5.1 項で定義した射影演算子 $E_H(\lambda)$ の間には

$$\tilde{E}_H((-\infty, \lambda]) = E_H(\lambda)$$

という関係がある．

例 2.23 は，スペクトル族が 1 次元のスペクトル測度に拡大されることを暗示する．実際，この予想は正しいのであるが，それを証明する前に，まず，1 次元のスペクトル測度からスペクトル族が定義されることを見ておこう：

命題 2.62　$\{E(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ を 1 次元のスペクトル測度とする．任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して，

$$E(\lambda) = E((-\infty, \lambda]) \tag{2.134}$$

とおけば，$\{E(\lambda)\}$ はスペクトル族である．さらに，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ と $\mathbb{R}$ 上の連続関数 f に対して，非減少関数 $\lambda \to \langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle$ による積分と測度 $B \to \langle \Psi, E(B)\Psi \rangle, B \in \mathsf{B}^1$, による積分は等しい．

証明　(2.87) はスペクトル測度の性質 (E.3) から導かれる．実数 λ に対して，

$$B_0 = (-\infty, \lambda], B_1 = [\lambda + 1, \infty), B_n = \left[\lambda + \frac{1}{n}, \lambda + \frac{1}{n-1}\right), n \geq 2,$$

とおけば，$n \neq m \Longrightarrow B_n \cap B_m = \emptyset$ であり，$\cup_{n=0}^{\infty} B_n = B_0 \cup (\lambda, \infty) = \mathbb{R}$. したがって，$\text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} E(B_n) = I$．一方，

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} E(B_n) &= E(\cup_{n=0}^{N} B_n) = E(\lambda) + E\left(\left[\lambda + \frac{1}{N}, \infty\right)\right) \\ &= E(\lambda) + I - E\left(\left(-\infty, \lambda + \frac{1}{N}\right)\right) \\ &= I - E\left(\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{N}\right)\right).\end{aligned}$$

ゆえに，

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty} E\left(\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{N}\right)\right) = 0.$$

これは，$\Psi \in \mathsf{H}$ を任意に固定するとき，任意の $\delta > 0$ に対して，番号 N_0 があって，$N \geq N_0$ ならば，

$$\left\langle \Psi, E\left(\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{N}\right)\right)\Psi \right\rangle = \left\| E\left(\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{N}\right)\right)\Psi \right\| < \delta$$

と同値である．$\varepsilon_0 = 1/N_0$ とすれば，$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ に対して，$\lambda + \varepsilon < \lambda + N_0^{-1}$ であるから，スペクトル測度の単調増加性によって，

$$0 \leq \langle \Psi, E((\lambda, \lambda + \varepsilon])\Psi > \leq \left\langle \Psi, E\left(\left(\lambda, \lambda + \frac{1}{N_0}\right)\right)\Psi \right\rangle < \delta.$$

したがって，

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \|E((\lambda, \lambda + \varepsilon])\Psi\| = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \langle \Psi, E((\lambda, \lambda + \varepsilon])\Psi \rangle = 0.$$

ゆえに，$\text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E((\lambda, \lambda + \varepsilon]) = 0$．等式 $E(\lambda + \varepsilon) - E(\lambda) = E((\lambda, \lambda + \varepsilon])$ に注意すれば，$\{E(\lambda)\}$ の右連続性 (2.89) が得られる．

$B_1 = (-\infty, 1], B_n = (n-1, n], n \geq 2,$ とおくと，$n \neq m \Longrightarrow B_n \cap B_m = \emptyset$ であり，$\cup_{n=1}^{\infty} B_n = \mathbb{R}$．したがって，$\text{s-}\lim_{N \to \infty} E(\cup_{n=1}^{N} B_n) = I$．一方，$E(\cup_{n=1}^{N} B_n) = E(N)$ であるから，$\text{s-}\lim_{N \to \infty} E(N) = I$．これは，

$$\text{s-}\lim_{N \to \infty} E((N, \infty)) = 0$$

と同値である．したがって，$\Psi \in \mathsf{H}$ を任意に固定するとき，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 N_0 があって，$N \geq N_0$ ならば，$0 \leq \langle \Psi, E((N, \infty))\Psi \rangle < \varepsilon$ が成立する．$\lambda \geq N_0$ のとき，$(\lambda, \infty) \subset (N_0, \infty)$ であるから，$0 \leq \langle \Psi, E((\lambda, \infty))\Psi \rangle < \varepsilon$ となる．これは，$\text{s-}\lim_{\lambda \to \infty} E((\lambda, \infty)) = 0$ を意味する．これと，$E(\lambda) = I - E((\lambda, \infty))$ によって，(2.88) の第 1 番目の式を得る．

$C_1 = (-1, \infty), C_n = (-n, -n+1], n \geq 2,$ とおけば，$n \neq m \Longrightarrow C_n \cap C_m = \emptyset$ であり，

$$\cup_{n=1}^{\infty} C_n = \mathbb{R}, \quad \cup_{n=1}^{N} C_n = (-N, \infty).$$

したがって，$\text{s-}\lim_{N \to \infty} E((-N, \infty)) = I$．ゆえに，$\text{s-}\lim_{N \to \infty} E(-N) = 0$．これから，前段の場合と同様にして，(2.88) の第 2 番目の式を得る．

積分に関する性質は，積分論の一般的定理による*18．　□

---

*18 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の §20 を参照．

2.7.2 スペクトル族およびスペクトル測度に関する拡大定理

命題 2.62 の逆も成立する：

定理 2.63 $\{E(\lambda)\}$ をスペクトル族とする．このとき，1 次元のスペクトル測度 $\{E(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ で (2.134) が成立するものがただひとつ存在する．さらに，$\{E(\lambda)\}$ の台と $\{E(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ の台は等しい．

この定理にいう 1 次元のスペクトル測度 $\{E(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ を**スペクトル族 $\{E(\lambda)\}$ に同伴するスペクトル測度**という．

命題 2.62 と定理 2.63 によって，スペクトル族と 1 次元のスペクトル測度には 1 対 1 の対応関係があることがわかる．

定理 2.63 は，次に述べる，もっと一般的な拡大定理の特殊な場合への応用として証明することができる．後の便宜も兼ねて，まず，こちらの方を証明する．

定理 2.64 拡大定理． $\mathbb{R}^d$ の区間 $(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_d, b_d]$ $(-\infty \le a_j < b_j \le \infty, j = 1, \cdots, d)$ の有限個の直和として表わされる集合の全体を B_0^d とする[*19]．B_0^d の各元 B に対して，ヒルベルト空間 H 上の射影演算子 $E_0(B)$ が定まり，2.7.1 項の初めに述べた (E.1), (E.2), (E.3) の性質をみたすとする（ただし，$E(\cdot), \mathsf{B}^d$ をそれぞれ，$E_0(\cdot), \mathsf{B}_0^d$ で置き換える）．このとき，d 次元のスペクトル測度 E で，$E(B) = E_0(B), B \in \mathsf{B}_0^d$, となるものがただひとつ存在する．

この定理を証明するには少し準備が必要である．$\mathsf{H}_1, \mathsf{H}_2$ をヒルベルト空間，$\mathsf{D}_j \subset \mathsf{H}_j$, $j = 1, 2$ を部分空間とする．直積空間 $\mathsf{D}_1 \times \mathsf{D}_2$ から $\mathbb{C}$ への写像 $s : (\Psi, \Phi) \to s(\Psi, \Phi) \in \mathbb{C}$ $(\Psi \in \mathsf{D}_1, \Phi \in \mathsf{D}_2)$ は，すべての $\Psi, \Xi \in \mathsf{D}_1, \Phi, \Theta \in \mathsf{D}_2, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して，

$$
\begin{aligned}
s(\Psi, \alpha\Phi + \beta\Theta) &= \alpha s(\Psi, \Phi) + \beta s(\Psi, \Theta), \\
s(\alpha\Psi + \beta\Xi, \Phi) &= \alpha^* s(\Psi, \Phi) + \beta^* s(\Xi, \Phi),
\end{aligned}
$$

をみたすとき，$\mathsf{D}_1 \times \mathsf{D}_2$ 上の**準双線形形式** (sesquilinear form) とよばれる．

---

*19 集合の直和とは，互いに共通部分をもたない集合の和集合のことをいう．

定数 $C>0$ が存在して，$|s(\Psi,\Phi)|\le C\|\Psi\|\,\|\Phi\|, \Psi\in \mathsf{D}_1$，$\Phi\in\mathsf{D}_2$, が成り立つとき，$s$ は**有界**であるという．この場合，

$$\|s\|:=\sup_{\Psi\in\mathsf{D}_1,\Phi\in\mathsf{D}_2,\Psi\neq 0,\Phi\neq 0}\frac{|s(\Psi,\Phi)|}{\|\Psi\|\,\|\Phi\|}$$

を s のノルムという．

$\mathsf{H}_1=\mathsf{H}_2$，$\mathsf{D}_1=\mathsf{D}_2=\mathsf{D}$ の場合の，$\mathsf{D}\times\mathsf{D}$ 上の準双線形形式を単に D 上の準双線形形式という．この型の準双線形形式 s がすべての $\Psi,\Phi\in\mathsf{D}$ に対して，$s(\Psi,\Phi)^*=s(\Phi,\Psi)$ をみたすとき，s は**エルミート**あるいは**対称**であるという．エルミートな準双線形形式を**エルミート形式**あるいは**対称形式**という．

H_2 から H_1 への有界演算子 A ($\mathsf{D}(A)=\mathsf{H}_2$ とする) に対して，$s_A(\Psi,\Phi)=\langle\Psi,A\Phi\rangle$,　$\Psi\in\mathsf{H}_1,\Phi\in\mathsf{H}_2$, とおけば，これが $\mathsf{H}_1\times\mathsf{H}_2$ 上の有界な準双線形形式であり，$\|s_A\|=\|A\|$ であることは容易にわかる．実際，s_A の準双線形性と有界性は，不等式 $\|s_A\|\le\|A\|$ とともにただちにわかる．一方，

$$\|A\Phi\|=\sup_{\Psi\neq 0}\frac{|\langle\Psi,A\Phi\rangle|}{\|\Psi\|}\le\|s_A\|\,\|\Phi\|.$$

したがって，$\|A\|\le\|s_A\|$．ゆえに，$\|s_A\|=\|A\|$．

実は，$\mathsf{H}_1\times\mathsf{H}_2$ 上の有界な準双線形形式はいまあげた例の形に限られる．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 2.65　s を $\mathsf{H}_1\times\mathsf{H}_2$ 上の有界な準双線形形式とする．このとき，H_2 から H_1 への有界演算子 A がただひとつ存在して，(i) $s(\Psi,\Phi)=\langle\Psi,A\Phi\rangle_{\mathsf{H}_1}$，$\Psi\in\mathsf{H}_1,\Phi\in\mathsf{H}_2$; (ii) $\|A\|=\|s\|$ が成り立つ．

さらに，$\mathsf{H}_1=\mathsf{H}_2=\mathsf{H}$ で s がエルミートであれば，A は H 上の有界な自己共役演算子である．

証明　$\Psi\in\mathsf{H}_1$ を任意にひとつ固定すれば，写像 $F:\Phi\to s(\Psi,\Phi)$ は H_2 上の有界線形汎関数である．したがって，リースの表現定理によって，$\eta\in\mathsf{H}_2$ が存在して，$F(\Phi)=\langle\eta,\Phi\rangle_{\mathsf{H}_2}$ と表わされる．しかも，この場合，$\|\eta\|=\|F\|$．ベクトル η は Ψ に対して，ただひとつ定まるから，対応:$\Psi\to\eta$ は H_1 から H_2 へのひとつの写像を定義する．これを B とおく：$B\Psi=\eta$．B が線形であることは容

易にわかる．$|F(\Phi)| = |s(\Psi,\Phi)| \le \|s\|\,\|\Psi\|\,\|\Phi\|$ であるから，$\|F\| \le \|s\|\,\|\Psi\|$．したがって，$\|B\Psi\| \le \|s\|\,\|\Psi\|$．ゆえに，$B$ は有界演算子である．こうして，$s(\Psi,\Phi) = \langle B\Psi,\Phi\rangle = \langle\Psi, B^*\Phi\rangle$ と書けるので，$B^* = A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}_2,\mathsf{H}_1)$ とおけばこれが求める有界演算子である．

$\mathsf{H}_1 = \mathsf{H}_2 = \mathsf{H}$ かつ s がエルミートであれば，$\langle\Psi, A\Phi\rangle = \langle A\Psi,\Phi\rangle$ となるので，A は対称である．A の一意性は容易であろう． □

次の定理もそれ自体として興味がある：

定理 2.66 F を H 上の実数値汎関数，すなわち，H から $\mathbb{R}$ への写像で次の条件 (i), (ii), (iii) をみたすものとする：

(i) 定数 $C > 0$ が存在して，$|F(\Psi)| \le C\|\Psi\|^2$，$\Psi \in \mathsf{H}$.

(ii) すべての $\Psi,\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$F(\Psi+\Phi) + F(\Psi-\Phi) = 2F(\Psi) + 2F(\Phi).$$

(iii) すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ と $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して，$F(\alpha\Psi) = |\alpha|^2 F(\Psi)$.

このとき，H 上の有界自己共役演算子 A がただひとつ存在して，

$$F(\Psi) = \langle\Psi, A\Psi\rangle, \quad \|A\| \le C,$$

が成立する．

証明 写像 $s : \mathsf{H}\times\mathsf{H} \to \mathbb{C}$ を

$$s(\Psi,\Phi) = \frac{1}{4}\{F(\Psi+\Phi) - F(\Psi-\Phi) - iF(\Psi+i\Phi) + iF(\Psi-i\Phi)\}, \quad \Psi,\Phi \in \mathsf{H},$$

によって定義する．このとき，以下に示すように，s は有界なエルミート形式である．ゆえに，定理 2.65 によって，求める結果が得られる．

上の s が有界なエルミート形式であることの証明：

（第 1 段）条件 (iii) によって，$F(\Psi-\Phi) = F(\Phi-\Psi), F(\Psi+i\Phi) = F(i(\Phi - i\Psi)) = F(\Phi-i\Psi), F(\Psi-i\Phi) = F(-i(\Phi+i\Psi)) = F(\Phi+i\Psi)$．これと F が実数値であることを用いると，$s(\Psi,\Phi)^* = s(\Phi,\Psi)$ を得る．

（第２段）$s(\Psi,\Phi)+s(\Psi,\eta)$ を計算する際に，条件 (ii) からでる式

$$F(\Psi+\alpha\Phi)+F(\Psi+\alpha\eta)=\frac{1}{2}\{F(2\Psi+\alpha(\Phi+\eta))+F(\alpha(\Phi-\eta)\},\alpha\in\mathbb{C},$$

を $\alpha=\pm 1,\pm i$ の場合に適用すれば，

$$\begin{aligned}s(\Psi,\Phi)+s(\Psi,\eta) \;=\; &\frac{1}{8}\{F(2\Psi+\Phi+\eta)-F(2\Psi-\Phi-\eta)\\ &-iF(2\Psi+i\Phi+i\eta)+iF(2\Psi-i\Phi-i\eta)\}\end{aligned}$$

を得る．再び，条件 (ii) を用いると

$$F(2\Psi+\alpha\Phi+\alpha\eta)=2F(\Psi)+2F(\Psi+\alpha\Phi+\alpha\eta)-F(\alpha\Phi+\alpha\eta)$$

が成り立つ．これを上の式に右辺に代入すれば，$s(\Psi,\Phi+\eta)$ になる．したがって，

$$s(\Psi,\Phi+\eta)=s(\Psi,\Phi)+s(\Psi,\eta).$$

また，

$$s(\Psi,i\Phi)=\frac{1}{4}\{F(\Psi+i\Phi)-F(\Psi-i\Phi)-iF(\Psi-\Phi)+iF(\Psi+\Phi)\}$$

であるから

$$s(\Psi,i\Phi)=is(\Psi,\Phi)$$

を得る．

（第３段）任意の自然数 n に対して，

$$s(\Psi,n\Phi)=ns(\Psi,\Phi)$$

を示す．$n=1,2$ のときは，第２段の結果から正しい．n のとき成り立つとすれば，$s(\Psi,(n+1)\Phi)=s(\Psi,n\Phi+\Phi)=s(\Psi,n\Phi)+s(\Psi,\Phi)=ns(\Psi,\Phi)+s(\Psi,\Phi)=(n+1)s(\Psi,\Phi)$．したがって，$n+1$ のときも成立する．

（第４段）任意の有理数 q,r に対して，

$$s(\Psi,(q+ir)\Phi)=(q+ir)s(\Psi,\Phi)$$

を示す．第2段によって，$s(\Psi,(q+ir)\Phi)=s(\Psi,q\Phi)+s(\Psi,ir\Phi)=s(\Psi,q\Phi)+is(\Psi,r\Phi)$ であるから，任意の有理数 $a=k/m, k,m\in\mathbb{Z}, m\neq 0,$ に対して，

$$s(\Psi,a\Phi)=as(\Psi,\Phi)$$

を示せばよい．第3段の結果より，$s(\Psi,a\Phi)=ks(\Psi,\Phi/m)$．第3段の結果は，また，$s(\Psi,\Phi)=s(\Psi,m(\Phi/m))=ms(\Psi,\Phi/m)$ を意味する．すなわち，$s(\Psi,\Phi/m)=s(\Psi,\Phi)/m$．したがって，$s(\Psi,q\Phi)=(k/m)s(\Psi,\Phi)=as(\Psi,\Phi)$．

（第5段） 任意の $\Psi,\Phi\in\mathcal{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}|s(\Psi,\Phi)| &\le \frac{C}{4}\{\|\Psi+\Phi\|^2+\|\Psi-\Phi\|^2+\|\Psi+i\Phi\|^2+\|\Psi-i\Phi\|^2\}\\ &\le C(\|\Psi\|^2+\|\Phi\|^2)\end{aligned}$$

であるから，$q>0$ を有理数とすれば，第4段より，$q|s(\Psi,\Phi)|=|s(\Psi,q\Phi)|\le C(\|\Psi\|^2+q^2\|\Phi\|^2)$．したがって，$|s(\Psi,\Phi)|\le C\left(\frac{1}{q}\|\Psi\|^2+q\|\Phi\|^2\right)$．正の有理数の全体は正の実数全体の中で稠密であるから，極限操作によって，この不等式は，すべての正の実数 q へと拡張される．右辺が最小になるのは，$q=\|\Psi\|/\|\Phi\|$ であるから ($\Phi\neq 0$ とする)，

$$|s(\Psi,\Phi)|\le 2C\|\Psi\|\,\|\Phi\|$$

を得る．

（第6段） z を複素数として，$f(z)=s(\Psi,z\Phi)$ とすれば，第5段の結果，$|f(z)|\le 2C|z|\,\|\Psi\|\,\|\Phi\|$ であって，第2段により，$f(z+w)=f(z)+f(w), z,w\in\mathbb{C},$ が成り立つ．したがって，$|f(z+w)-f(z)|=|f(w)|\le 2C|w|\,\|\Psi\|\,\|\Phi\|$ となるので，f は連続である．第4段によって有理複素数 α に対して，$f(\alpha)=\alpha f(1)$．これと有理複素数の全体は $\mathbb{C}$ で稠密であること及び f の連続性によって，すべての $z\in\mathbb{C}$ に対して，$f(z)=zf(1)$ が得られる．したがって，$s(\Psi,z\Phi)=zs(\Psi,\Phi)$． □

定理 2.64 の証明

任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$m_0(C;\Psi) := \|E_0(C)\Psi\|^2, C \in \mathsf{B}_0^d$, は B_0^d 上の有限加法的測度であり，(E.2) の性質により，完全加法的である．さらに，

$$m_0(\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{d\text{ 個}};\Psi) = \|\Psi\|^2 < \infty$$

であり，B_0^d から生成されるボレル集合体は B^d に等しい．したがって，E. ホップの拡張定理[*20]によって，B^d 上の測度 $\mu(\cdot\,;\Psi)$ で，$\mu(C;\Psi) = m_0(C;\Psi), C \in \mathsf{B}_0^d$, かつ任意の $B \in \mathsf{B}^d$ に対して $\mu(B;\Psi) \le m_0(\mathbb{R}^d;\Psi) = \|\Psi\|^2$ となるものがただひとつ存在する．また，

$$m_0(C;\Psi+\Phi) + m_0(C;\Psi-\Phi) = 2m_0(C;\Psi) + 2m_0(C;\Phi),$$
$$m_0(C;\alpha\Psi) = |\alpha|^2 m_0(C;\Psi), \alpha \in \mathbb{C}, \Psi, \Phi \in \mathsf{H}, C \in \mathsf{B}_0^d,$$

も容易にわかる．したがって，拡大の一意性により，

$$\mu(C;\Psi+\Phi) + \mu(C;\Psi-\Phi) = 2\mu(C;\Psi) + 2\mu(C;\Phi),$$
$$\mu(C;\alpha\Psi) = |\alpha|^2\mu(C;\Psi), C \in \mathsf{B}^d,$$

が成り立つ．ゆえに，$F(\Psi) := \mu(C;\Psi)$ は定理 2.66 の仮定をみたす．よって，H 上の有界な自己共役演算子 $E(C)$ がただひとつ存在して，$\mu(C;\Psi) = \langle\Psi, E(C)\Psi\rangle, C \in \mathsf{B}^d$, と表わされる．$\mu(C;\Psi) \ge 0$ であるから，$E(C) \ge 0$ である．

あとは，E がスペクトル測度であることを示せばよい．偏極恒等式によって，複素測度 $\langle\Psi, E(\cdot)\Phi\rangle, \Psi, \Phi \in \mathsf{H}$, は B_0^d 上の有限加法的複素測度 $\langle\Psi, E_0(\cdot)\Phi\rangle$ の一意的拡大である．任意の $C_1, C_2 \in \mathsf{B}_0^d$ に対して，$\langle\Psi, m_0(C_1)m_0(C_2)\Phi\rangle = \langle\Psi, m_0(C_1 \cap C_2)\Phi\rangle$ であるから，C_2 を固定して，両辺を C_1 に関する複素測度の関係式とみれば，拡大の一意性によって，$\langle\Psi, E(C_1)m_0(C_2)\Phi\rangle = \langle\Psi, E(C_1 \cap C_2)\Phi\rangle, C_1 \in \mathsf{B}^d$．次に C_2 に関する測度の関係式とみれば，$\langle\Psi, E(C_1)E(C_2)\Phi\rangle = \langle\Psi, E(C_1 \cap C_2)\Phi\rangle$, $C_1, C_2 \in \mathsf{B}^d$, が得られる．したがって，$E(C_1)E(C_2) =$

[*20] 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の定理 9.1 を参照．

$E(C_1 \cap C_2) = E(C_2)E(C_1)$. 特に，$E(C)^2 = E(C)$. したがって，$\{E(C)|C \in \mathsf{B}^d\}$ は可換な射影演算子の族である．スペクトル測度における条件の (E.1) は明らか．(E.3) はすでに見た．B, B_n を条件 (E.2) のようにとると測度 $\mu(\cdot;\Psi)$ の完全加法性によって，$\text{w-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N E(B_n) = E(B)$. これは，命題 2.48(ii) によって，強収束を意味する．したがって，(E.2) がみたされる． □

定理 2.63 の証明

区間 $\Delta = (a,b]$ に対して，$E_0(\Delta) := E(b) - E(a)$ とおく（$E(\infty) := I$, $E(-\infty) := 0$）．$j \neq k$ ならば，$\Delta_j \cap \Delta_k = \emptyset$ をみたす区間 $\Delta_j, j = 1, 2, \cdots, n$, の和集合 $\cup_{j=1}^n \Delta_j$ に対して，

$$E_0(\cup_{j=1}^n \Delta) = \sum_{j=1}^n E_0(\Delta_j)$$

と定義する．この E_0 が (E.1), (E.3) をみたすことは容易にわかる．$E(\lambda)$ の右連続性によって，E_0 は B_0^1 上で完全加法的である*[21]. したがって，E_0 は $d = 1$ の場合における，定理 2.64 の仮定をみたす．ゆえに，求めるスペクトル測度 $\{E(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ がただひとつ存在する．

$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ の台を S_1，$\{E(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ の台を S_2 としよう．$\lambda \in S_1$ ならば，$E(\lambda) \neq E(\lambda - 0)$ したがって，$E(\{\lambda\}) \neq 0$. ゆえに，$\lambda \in S_2$.

逆に，$\mu \in S_2$ とすれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$E((\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)) \neq 0$. これから，$E(\mu + \varepsilon) \neq E(\mu - \varepsilon)$. したがって，$\mu$ はスペクトル族 $\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ の定点ではない．ゆえに，$\mu \in S_1$. 以上から，$S_1 = S_2$. □

定理 2.63 の一般化として次の定理がある：

定理 2.67 $\{E_j(\lambda)\}$, $j = 1, \cdots, d$, を d 個のスペクトル族で互いに可換，すなわち，$E_j(\lambda)E_k(\mu) = E_k(\mu)E_k(\lambda)$, $j, k = 1, \cdots, d$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, が成立するとする．$\{E_j(\lambda)\}$ に同伴する 1 次元のスペクトル測度を $\{E_j(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ とする（定理 2.63）．このとき，d 次元のスペクトル測度 E で，任意の $B_1, \cdots, B_d \in \mathsf{B}_0^1$

*[21] 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の §4，定理 4.2 を参照．

に対して

$$E(B_1 \times \cdots \times B_d) = E_1(B_1) \cdots E_d(B_d) \tag{2.135}$$

をみたすものがただひとつ存在する．

証明　まず，任意の $B, C \in \mathsf{B}^1, j, k = 1, \cdots, d,$ に対して，$E_j(B)$ と $E_k(C)$ は可換であることに注意する．$B_1 \times \cdots \times B_d \in \mathsf{B}_0^d$ $(B_1, \cdots, B_d \in \mathsf{B}_0^1)$ という形の集合に対しては，$E_0(B_1 \times \cdots \times B_d)$ を (2.135) の右辺で定義し，B_0^d に属する任意の集合

$$K = \cup_{k=1}^m B_1^{(k)} \times \cdots \times B_d^{(k)}$$

（$B_1^{(k)} \times \cdots \times B_d^{(k)}$，$k = 1, \cdots, m$ は互いに共通部分をもたない）に対しては，

$$E_0(K) = \sum_{k=1}^m E(B_1^{(k)} \times \cdots \times B_d^{(k)})$$

とおく．このとき，$E_0(K)$ は射影演算子である（ここで，条件にいう可換性が使われる）．$\{E_0(B) | B \in \mathsf{B}_0^d\}$ に関してスペクトル測度の性質 (E.1) は明らかに成立する．(E.3) も容易に証明される．さらに，通常の直積測度の構成法とまったく同じやり方で，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，B_0^d 上の有限加法的測度 $K \to \langle \Psi, E(K)\Psi \rangle$ は完全加法的であることが示される[*22]．したがって，B_0^d 上で，(E.2) が成立する．ゆえに，定理 2.64 によって，求める結果を得る．　□

定理 2.67 でその一意的存在が示された，d 次元スペクトル測度を $E_1, \cdots, E_d$ の**直積スペクトル測度** (product spectral measure) とよび，記号的に $E_1 \otimes \cdots \otimes E_d$ と書く．後に見るように，直積スペクトル測度は，量子力学への応用においては，互いに独立な，複数の物理量の関数を定義するための道具となる．

2.8 演算子解析

定理 2.52 において，スペクトル族 $\{E(\lambda)\}$ があたえられたとき，$\mathbb{R}$ 上の連続関数 f に対して，“$\int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda)$”をシンボルとするような演算子が定義される

*22 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の §9，定理 9.4 の証明を参照．

ことを証明した．この節では，定理 2.52 と同様の考え方に基づいて，d 次元のスペクトル測度 E に対して，“$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)dE(\lambda)$” ($f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ はボレル可測関数) を象徴記号とするような演算子が定義されうることを示し，この演算子の性質を調べる．$\{E(B)|\ B \in \mathsf{B}^d\}$ を d 次元のスペクトル測度としよう．$\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数 f に対して，H の部分集合

$$\mathsf{D}_f := \left\{\Psi \in \mathsf{H} \middle| \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty\right\} \tag{2.136}$$

を定義する．

補題 2.68

(i)　D_f は部分空間である．

(ii)　$E(\{\lambda \in \mathbb{R}^d|\ |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば，D_f は稠密である[*23]．

証明　(i) $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}_f, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$, とすれば，

$$\|E(B)(\alpha\Psi + \beta\Phi)\|^2 \le 2|\alpha|^2\|E(B)\Psi\|^2 + 2|\beta|^2\|E(B)\Phi\|^2,\ B \in \mathsf{B}^d,$$

であるから，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)(\alpha\Psi + \beta\Phi)\|^2 \ &\le\ 2|\alpha|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d|E(\lambda)\Psi|^2 \\ &\quad +2|\beta|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d|E(\lambda)\Phi|^2 < \infty.\end{aligned}$$

したがって $\alpha\Psi + \beta\Phi \in \mathsf{D}_f$. ゆえに D_f は部分空間である．

(ii) 各 $n \ge 1$ に対し

$$B_n = \{\lambda \in \mathbb{R}^d | n-1 \le |f(\lambda)| < n\}$$

を定義する．f がボレル可測であることにより，$B_n \in \mathsf{B}^d$. 部分空間

$$\mathsf{D} := \mathcal{L}(\{E(B_n)\Psi|\Psi \in \mathsf{H}, n \ge 1\})$$

の元 $\Psi_n = E(B_n)\Psi$ に対して，

$$\langle\Psi_n, E(B)\Psi_n\rangle = \langle\Psi, E(B_n)E(B)E(B_n)\Psi\rangle = \langle\Psi, E(B_n \cap B)\Psi\rangle.$$

---

*23 $\{\lambda \in \mathbb{R}^d|\ |f(\lambda)| = \infty\} := \mathbb{R}^d \setminus \{\lambda \in \mathbb{R}^d|\ |f(\lambda)| < \infty\}$.

これから

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi_n, E(\lambda)\Psi_n\rangle &= \int_{B_n} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi\rangle \\ &\le n^2\langle \Psi, E(B_n)\Psi\rangle \\ &\le n^2\|\Psi\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

したがって，$\Psi_n \in \mathsf{D}_f$．ゆえに，(i) より，$\mathsf{D} \subset \mathsf{D}_f$．仮定から，$|f(x)|$ は測度 $\|E(\cdot)\Psi\|^2$ について a.e. 有限である．したがって，$\|E(S)\Psi\|^2 = 0$ となるボレル集合 S があって，$\mathbb{R}^d \setminus S = \cup_{n=1}^{\infty} B_n$ となる．さらに，$n \neq m$ ならば，$B_n \cap B_m = \emptyset$ であるから，(E.2) により，

$$E(\mathbb{R}^d \setminus S)\Psi = \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} E(B_n)\Psi.$$

$E(S) = 0$ であるから，上式の左辺は $E(\mathbb{R}^d)\Psi = \Psi$ に等しい．したがって，Ψ は D の元で近似されるので，D は稠密である．ゆえに D_f も稠密である．　□

任意の $\Phi \in \mathsf{D}_f$ を固定し，写像 $l : \mathsf{H} \to \mathbb{C}$ を

$$l(\Psi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)^* d\langle \Phi, E(\lambda)\Psi\rangle,\ \Phi \in \mathsf{H} \tag{2.137}$$

によって定義する．

補題 2.69　$l \in \mathsf{H}^*$ であり，

$$\|l\| = \left(\int |f(\lambda)|^2 d\langle \Phi, E(\lambda)\Phi\rangle\right)^{1/2}. \tag{2.138}$$

証明　はじめに，(2.137) の右辺が存在することを確かめておく．これはルベーグ積分の定義までもどって考えなければならない．まず，$f = f_1 + if_2$ (f_1, f_2 は実数値関数) と分解し，$f_j = f_{j+} - f_{j-}$，$f_{j\pm} \ge 0$, と分解する．ただし，$f_{j+}(\lambda) := \max\{0, f_j(\lambda)\} \ge 0$，$f_{j-}(\lambda) := \max\{0, -f_j(\lambda)\} \ge 0$．このとき，$f_{j\pm}$ は単関数の列によって，各点収束の意味で近似できる[*24]．したがって，

[*24] たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の p.62，定理 10.1 を参照．

$f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda)$, $f_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{M_n} \alpha_{k,n}\chi_{B_{k,n}}(\lambda)$ という形に書ける．ただし，M_n は自然数，$\alpha_{k,n} \in \mathbb{C}$ は定数，$\{B_{k,n}\}_{k=1}^{M_n}$ は互いに共通部分をもたないボレル集合で $\cup_{k=1}^{M_n} B_{k,n} = \mathbb{R}^d$ をみたす．また，$|f_n(\lambda)| \le |f(\lambda)|$, $\lambda \in \mathbb{R}^d, n \in \mathbb{N} \cdots (*)$ が成り立つようにとれる．ルベーグ積分の定義によって，

$$L_n := \sum_{k=1}^{M_n} \alpha_{k,n}^* \langle \Phi, E(B_{k,n})\Psi\rangle$$

の極限 $L := \lim_{n\to\infty} L_n$ が存在すれば，この L は (2.137) の右辺に等しいので，確かに $l(\Psi)$ は定義される．そこで，L_n の極限の存在を示そう．

スペクトル測度の性質によって

$$\begin{aligned} |\langle \Phi, E(B)\Psi\rangle| &= |\langle \Phi, E(B)^2\Psi\rangle| = |\langle E(B)\Phi, E(B)\Psi\rangle| \\ &\le \|E(B)\Phi\|\,\|E(B)\Psi\|. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{M_n} |\alpha_{k,n}|\,|\langle \Phi, E(B_{k,n})\Psi\rangle| \\ &\le \sum_{k=1}^{M_n} |\alpha_{k,n}|\,\|E(B_{k,n})\Phi\|\,\|E(B_{k,n})\Psi\| \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{M_n} |\alpha_{k,n}|^2 \|E(B_{k,n})\Phi\|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{M_n} \|E(B_{k,n})\Psi\|^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{M_n} |\alpha_{k,n}|^2 \|E(B_{k,n})\Phi\|^2\right)^{1/2} \|\Psi\|. \end{aligned}$$

ここで，第 2 番目の不等号は，k の和に関するコーシー – シュヴァルツの不等式による．最後の等号は，(E.1) から得られる．この不等式の右辺は，$n \to \infty$ のとき，

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Phi\|^2\right)^{1/2} \|\Psi\|$$

に収束する．したがって，$\{L_n\}_n$ は収束し，同時に

$$|l(\Psi)| \le \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\langle \Phi, E(\lambda)\Phi\rangle\right)^{1/2} \|\Psi\|. \tag{2.139}$$

が示されたことになる．これから，特に，$l \in \mathsf{H}^*$ である．

(2.138) を示すには，すでに (2.139) がわかっているので，

$$\|\Psi_n\| = 1, \quad \lim_{n\to\infty} |l(\Psi_n)| = \left(\int |f(\lambda)|^2 d\langle \Phi, E(\lambda)\Phi\rangle\right)^{1/2}$$

となる Ψ_n の存在を示せばよい．そのためには，$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda)|^2 d\langle \Phi, E(\lambda)\Phi\rangle > 0$ の場合を考えれば十分である（これが 0 の場合は，$l(\Psi) = 0$ となるので，$\|l\| = 0$ であり，(2.138) は自明的に成り立つ）．$\Theta_n = \sum_{k=1}^{M_n} \alpha_{k,n} E(B_{k,n})\Phi$ とおく．このとき，スペクトル測度の直交性により，

$$\|\Theta_n\|^2 = \sum_{k=1}^{M_n} |\alpha_{k,n}|^2 \|E(B_{k,n})\Phi\|^2 \to \int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Phi\|^2 \ (n \to \infty).$$

したがって，特に，$\Theta_n \neq 0$ として一般性を失わない．そこで，$\Psi_n = \Theta_n/\|\Theta_n\|$ とおく．このとき，

$$l(\Psi_n) = \|\Theta_n\|^{-1} \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)^* f_n(\lambda) d\langle \Phi, E(\lambda)\Phi\rangle.$$

上の $(*)$ によって，$|f(\lambda)^* f_n(\lambda)| \le |f(\lambda)|^2$ であり，また，$f(\lambda)^* f_n(\lambda) \to |f(\lambda)|^2 \ (n \to \infty)$．したがって，ルベーグの優収束定理によって，

$$\lim_{n\to\infty} l(\Psi_n) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Phi\|^2\right)^{1/2}$$

を得る．ゆえに，(2.138) が証明された． □

補題 2.69 とリースの表現定理とによって

$$\begin{aligned} l(\Psi) &= \langle u_\Phi, \Psi\rangle, \quad \Psi \in \mathsf{H}, \\ \|l\| &= \|u_\Phi\|, \end{aligned}$$

となるベクトル $u_\Phi \in \mathsf{H}$ がただひとつ存在する．ゆえに，l を経由して，写像 $T_f : \mathsf{D}_f \to \mathsf{H}$ が

$$T_f\Phi = u_\Phi$$

によって定義される．これが線形であることは，l の線形性の証明と同様な方法で示される．したがって，$\langle T_f\Phi, \Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)^* d\langle\Phi, E(\lambda)\Psi\rangle$．この複素共役をとれば

$$\langle\Psi, T_f\Phi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) d\langle\Psi, E(\lambda)\Phi\rangle, \quad \Psi \in \mathsf{H},\ \Phi \in \mathsf{D}_f. \tag{2.140}$$

以上の結果を定理の形にまとめておこう．

定理 2.70 $\{E(B)|B \in \mathsf{B}^d\}$ をスペクトル測度，f を $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数とする．このとき，$\mathsf{D}(T_f) = \mathsf{D}_f$ と (2.140) をみたす，H 上の演算子 T_f がただひとつ存在する．さらに

$$\|T_f\Phi\|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\langle E(\lambda)\Phi, \Phi\rangle, \quad \Phi \in \mathsf{D}_f \tag{2.141}$$

が成り立つ．また，$E(\{\lambda \in \mathbb{R}^d|\ |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば，$\mathsf{D}(T_f)$ は稠密である．

上の定理であたえられる演算子 T_f を記号的に

$$T_f = \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) \tag{2.142}$$

と書く．

以上の議論をまとめると，ヒルベルト空間 H 上に d 次元のスペクトル測度があたえられると，$\mathbb{R}^d$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，H 上の演算子 T_f がひとつ定まるということである．これは，$\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数の空間から H 上の演算子の空間への写像 $\mathbb{T} : f \to T_f$ を定義する．このような写像は**演算子値汎関数** (operator-valued functional) とよばれる．以下において，演算子値汎関数 $\mathbb{T}$ が有する性質の一端を議論する．これはボレル可測関数の空間の代数的構造（和，積，複素共役をとる演算等）が演算子値汎関数 $\mathbb{T}$ の性質としてどのように表現されるかを見ることに他ならない．このような解析を**演算子解析** (operational calculus) あるいは**作用素解析**という．

注意 f が $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数ならば，シンボル "$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) dE(\lambda)$" は，実は，次のようにして，リーマン積分的に定義される演算子として意味をもちうる．$R > 0$ とし，

$V_R = [-R, R]^d \subset \mathbb{R}^d$ とおく，閉区間 $[-R, R]$ を $-R = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = R$ のように分割し，$\max_{j=1,\cdots,n} |\lambda_j - \lambda_{j-1}| \to 0$ $(n \to \infty)$ とする．$\xi_j \in (\lambda_{j-1}, \lambda_j]$ とし，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，リーマン近似和

$$S_n\Psi := \sum_{i_1,\cdots,i_d=1}^{n} f(\xi_{i_1}, \cdots, \xi_{i_d}) E((\lambda_{i_1}, \lambda_{i_1-1}] \times \cdots (\lambda_{i_d}, \lambda_{i_d-1}])\Psi$$

をつくる．このとき，$\lim_{n\to\infty} S_n\Psi$ の存在が普通のリーマン積分の場合と同様にして示される．そこで，

$$\int_{V_R} f(\lambda) dE(\lambda)\Psi := \lim_{n\to\infty} S_n\Psi$$

と定義する．この場合，

$$\| \int_{V_R} f(\lambda) dE(\lambda)\Psi \|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2$$

が成立することもわかる．さらに，$\Psi \in \mathsf{D}_f$ であれば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) dE(\lambda)\Psi := \lim_{R\to\infty} \int_{V_R} f(\lambda) dE(\lambda)\Psi$$

は存在し，これによって定義される演算子は，上で定義した演算子 T_f に等しい．これらの事実の証明の詳細を埋めることは，単位の分解の扱いにすでに慣れた読者にとっては，それほど難しくはないはずである．

定理 2.71 f, g を $\mathbb{R}^d$ 上のボレル可測関数とする．

(i) 任意のボレル集合 B に対して

$$E(B)T_f \subset T_f E(B). \tag{2.143}$$

(ii) f が有界ならば T_f は有界であり

$$\|T_f\| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |f(x)|. \tag{2.144}$$

(iii) $T_{f^*} \subset (T_f)^*$.

(iv) $E(\{\lambda |\ |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば，

$$T_{f^*} = (T_f)^* \tag{2.145}$$

が成立する．特に，T_f は閉演算子である．

(v) f が実数値で $E(\{\lambda|\ |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$ ならば T_f は自己共役である．特に，f が $\mathbb{R}^d$ 上の実数値連続関数ならば T_f は自己共役である．

(vi) $\mathsf{D}(T_f + T_g) = \mathsf{D}(T_{f+g}) \cap \mathsf{D}(T_g)$ かつ

$$T_f + T_g \subset T_{f+g}. \tag{2.146}$$

(vii) $\mathsf{D}(T_f T_g) = \mathsf{D}(T_{fg}) \cap \mathsf{D}(T_g)$ かつ

$$T_f T_g \subset T_{fg}.$$

(viii) $|f(\lambda)| = 1,\ \lambda \in \mathbb{R}^d$ ならば T_f はユニタリである．

(ix) (スペクトル) $\mathbb{R}^d$ の部分集合 D に対して，D の点の，f による像の全体を $f(D)$ とする：

$$f(D) := \{f(\lambda)|\lambda \in D\} \tag{2.147}$$

f が $\mathbb{R}^d$ 上で連続ならば，

$$\sigma(T_f) = \overline{f(\mathrm{supp}\, E)} \tag{2.148}$$

が成立する．

証明 (i) $\Psi \in \mathsf{D}(T_f)$ とすれば

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)E(B)\Psi\|^2 &= \int_B |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 \\ &\le \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

したがって，$E(B)\Psi \in \mathsf{D}(T_f)$. すでに注意したように，任意の $B_1, B_2 \in \mathsf{B}^d$ に対して，$E(B_1)$ と $E(B_2)$ が可換である．これと $E(B)$ の自己共役性を用いると，すべての $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle \Phi, T_f E(B)\Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) d\langle \Phi, E(\lambda)E(B)\Psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) d\langle E(B)\Phi, E(\lambda)\Psi\rangle \\ &= \langle E(B)\Phi, T_f\Psi\rangle \\ &= \langle \Phi, E(B)T_f\Psi\rangle\end{aligned}$$

$\Phi \in \mathsf{H}$ は任意であったから，$T_f E(B)\Psi = E(B)T_f\Psi$ を得る．ゆえに (2.143) が成り立つ．

(ii) $C := \sup_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)| < \infty$ ならば，すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対し

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}|f(\lambda)|^2 d\langle E(\lambda)\Psi,\Psi\rangle &\le C^2\int_{\mathbb{R}^d} d\langle E(\lambda)\Psi,\Psi\rangle \\ &= C^2\langle E(\mathbb{R}^d)\Psi,\Psi\rangle = C^2\|\Psi\|^2 < \infty.\end{aligned}$$

ゆえに $\mathsf{D}(T_f) = \mathsf{H}$，$T_f$ は有界であり，(2.144) が成立する．

(iii) $\mathsf{D}(T_f) = \mathsf{D}(T_{f^*})$ は定義から明らか．任意の $\Psi \in \mathsf{D}(T_f), \Phi \in \mathsf{D}(T_{f^*})$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle\Phi, T_f\Psi\rangle &= \left(\int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)^* d\langle\Psi, E(\lambda)\Phi\rangle\right)^* \\ &= \langle\Psi, T_{f^*}\Phi\rangle^* = \langle T_{f^*}\Phi,\Psi\rangle.\end{aligned}$$

したがって，$\Phi \in \mathsf{D}((T_f)^*)$ かつ $(T_f)^*\Phi = T_{f^*}\Phi$．ゆえに，求める結果を得る．

(iv) (2.145) を示すには，(iii) によって，$\mathsf{D}((T_f)^*) \subset \mathsf{D}(T_{f^*}) = \mathsf{D}(T_f)$ を示せばよい．証明の考え方は，定理 2.52(iii) の場合と同様である．$\Psi \in \mathsf{D}((T_f)^*)$ としよう．B_n を補題 2.68(ii) の証明において定義された集合とし，$C_n = \cup_{k=1}^n B_k$ とおく．このとき，補題 2.68(ii) の証明によって，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} E(C_n) = I$．また，(i) によって，$E(C_n)T_f \subset T_f E(C_n)$．したがって，定理 2.52(iii) の証明で，$A_E(f)$，E_n をそれぞれ，T_f，$E(C_n)$ で置き換えた議論がそのまま成立する（詳細を検討することは読者に任せる）．よって，$\Psi \in \mathsf{D}(T_f)$．演算子 T_f の閉性は，いま示した式 (2.145) から $T_f = (T_{f^*})^*$ と書けること，および共役演算子は閉であるという事実からしたがう．

(v) f が実数値ならば，$T_{f^*} = T_f$ であるから，(iv) によって，$T_f = (T_f)^*$．したがって，T_f は自己共役である．f が実数値連続関数ならば，$\{\lambda \in \mathbb{R}^d|\ |f(\lambda)| = \infty\} = \emptyset$. したがって，$E(\{\lambda \in \mathbb{R}^d|\ |f(\lambda)| = \infty\}) = 0$. ゆえに，前主張の仮定が自動的に満たされる．よって，T_f は自己共役である．

(vi) $\mathsf{D}(T_f + T_g) = \mathsf{D}(T_f) \cap \mathsf{D}(T_g)$ であるから，$\Psi \in \mathsf{D}(T_f + T_g)$ であることは

$$\int_{\mathbb{R}^d}|f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty, \int_{\mathbb{R}^d}|g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty,$$

と同値である．この条件は，初等的な不等式

$$\frac{1}{2}|f(\lambda)|^2 - |g(\lambda)|^2 \leq |f(\lambda)+g(\lambda)|^2 \leq 2|f(\lambda)|^2 + 2|g(\lambda)|^2$$

によって，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)+g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty, \int_{\mathbb{R}^d} |g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty,$$

と同値であり，これは $\Psi \in \mathsf{D}(T_{f+g}) \cap \mathsf{D}(T_g)$ ということである．したがって，$\mathsf{D}(T_f + T_g) = \mathsf{D}(T_{f+g}) \cap \mathsf{D}(T_g) \subset \mathsf{D}(T_{f+g})$．これがわかれば，(2.146) は明らかであろう．

(vii) 定義域に関する主張は次の同値変形による：

$$\begin{aligned}
\Psi \in \mathsf{D}(T_f T_g) \iff & \int_{\mathbb{R}^d} |g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty, \\
& \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)T_g\Psi\|^2 < \infty, \\
\iff & \int_{\mathbb{R}^d} |g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty, \\
& \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 |g(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty \\
\iff & \Psi \in \mathsf{D}(T_g) \cap \mathsf{D}(T_{fg}).
\end{aligned}$$

任意の $\Psi \in \mathsf{D}(T_f T_g), \Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\langle \Phi, T_f T_g \Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) d\langle \Phi, E(\lambda) T_g \Psi \rangle.$$

一方，任意の $B \in \mathsf{B}^d$ に対し

$$\begin{aligned}
\langle \Phi, E(B) T_g \Psi \rangle &= \langle \Phi, T_g E(B) \Psi \rangle \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} g(\lambda) d\langle \Phi, E(\lambda) E(B) \Psi \rangle \\
&= \int_B g(\lambda) d\langle \Phi, E(\lambda) \Psi \rangle.
\end{aligned}$$

したがって，複素測度 $\langle\Phi, E(\cdot)T_g\Psi\rangle$ は複素測度 $\langle\Phi, E(\cdot)\Psi\rangle$ の不定積分である．ゆえに，

$$\langle\Phi, T_fT_g\Psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda)g(\lambda)d\langle\Phi, E(\lambda)\Psi\rangle$$

が導かれる（付録 A，定理 A.13 を参照）．この右辺は $\langle\Phi, T_{fg}\Psi\rangle$ にほかならない．したがって，$\langle\Phi, T_fT_g\Psi\rangle = \langle\Phi, T_{fg}\Psi\rangle$．ゆえに，$T_fT_g\Psi = T_{fg}\Psi$.

(viii) $|f| = 1$ ならば，(vii) によって，$T_fT_{f^*} = T_{|f|^2} = I$．同様に，$T_{f^*}T_f = I$ が成り立つ．(iv) により，$T_{f^*} = (T_f)^*$ であるから，$T_f(T_f)^* = I = (T_f)^*T_f$．したがって，命題 2.3 によって，$T_f$ はユニタリである．

(ix) まず，$\sigma(T_f) \supset \overline{f(\operatorname{supp} E)}$ を示そう．$z \in \varrho(T_f)$ とすれば，$T_f - z$ は全単射であり，$(T_f - z)^{-1}$ は有界である．いま，仮に $z = f(\mu)$ となる $\mu \in \operatorname{supp} E$ があったとする．このとき，任意の n に対して，$E((\mu - \frac{1}{n}, \mu + \frac{1}{n})) \neq 0$ である．したがって，$\eta_n := E((\mu - \frac{1}{n}, \mu + \frac{1}{n}))\Phi_n \neq 0$ となるベクトル $\Phi_n \in \mathcal{H}$ が存在する．$\Psi_n = \eta_n/\|\eta_n\|$ とすれば，$\|\Psi_n\| = 1$ であり，

$$\|(T_f - z)^{-1}\Psi_n\|^2 = \int_{(\mu-\frac{1}{n},\mu+\frac{1}{n})} \frac{1}{|f(\lambda) - f(\mu)|^2} d\|E(\lambda)\Psi_n\|^2.$$

f は連続であるから，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，正数 δ が存在して，$|\lambda - \mu| < \delta$ ならば，$|f(\lambda) - f(\mu)| < \varepsilon$ が成り立つ．$\lambda \in (\mu - \frac{1}{n}, \mu + \frac{1}{n})$ ならば，$|\lambda - \mu| < 1/n$．したがって，$n > 1/\delta$ ならば，$|f(\lambda) - f(\mu)| < \varepsilon, \lambda \in (\mu - \frac{1}{n}, \mu + \frac{1}{n})$, が成り立つ．ゆえに，$n > 1/\delta$ のとき，

$$\|(T_f - z)^{-1}\Psi_n\|^2 \geq \frac{1}{\varepsilon^2}\int_{(\mu-\frac{1}{n},\mu+\frac{1}{n})} d\|E(\lambda)\Psi_n\|^2 = \frac{1}{\varepsilon^2}.$$

$\|\Psi_n\| = 1$ であり，$\varepsilon > 0$ は任意にとれるから，これは $(T_f - z)^{-1}$ の有界性に反する．よって，$z \notin f(\operatorname{supp} E)$．ゆえに，$\sigma(T_f) \supset f(\operatorname{supp} E)$．閉包をとれば，$\sigma(T_f) \supset \overline{f(\operatorname{supp} E)}$.

この逆の包含関係を示すために，$z \in \overline{f(\operatorname{supp} E)}^c$ とする．このとき，定数 $c > 0$ があって，$|z - f(\lambda)| \geq c$, $\lambda \in \operatorname{supp} E$．したがって，この定理の (ii) によって，

$$S := \int_{\mathbb{R}} (f(\lambda) - z)^{-1} dE(\lambda) = \int_{\operatorname{supp} E} (f(\lambda) - z)^{-1} dE(\lambda)$$

は有界な作用素であり，この定理の (vii) によって，$(T_f-z)S = I, S(T_f-z) \subset I$. これは，$T_f-z$ の全単射性と $S = (T_f-z)^{-1}$ を意味する．したがって，$z \in \varrho(T_f)$. ゆえに，$\overline{f(\operatorname{supp} E)}^c \subset \varrho(T_f)$．これから，$\sigma(T_f) \subset \overline{f(\operatorname{supp} E)}$ を得る． □

系 2.72　ボレル集合 $B \in \mathsf{B}^d$ に対して，$\mathsf{M}_B = \mathsf{R}(E(B))$ とおく．このとき，$\mathbb{R}^d$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，T_f は M_B によって簡約される．

証明　閉部分空間 M_B への射影演算子は $E(B)$ であり，定理 2.71(i) が成り立つので，題意がしたがう．

定理 2.73　f を $\mathbb{R}^d$ 上の任意のボレル可測関数とし，$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ とする．任意の $B \in \mathsf{B}^d$ に対して，$E(B)A = AE(B)$（すなわち，A と $E(B)$ は可換）ならば，

$$AT_f \subset T_f A$$

である．

証明　$\Psi \in \mathsf{D}(T_f)$ とする．仮定により，

$$\|E(B)A\Psi\| = \|AE(B)\Psi\| \le \|A\|\,\|E(B)\Psi\|.$$

したがって，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)A\Psi\|^2 \le \|A\|^2 \int_{\mathbb{R}^d} |f(\lambda)|^2 d\|E(\lambda)\Psi\|^2 < \infty.$$

ゆえに $A\Psi \in \mathsf{D}(T_f)$．さらに，任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\begin{aligned} \langle \Phi, T_f A\Psi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) d\langle \Phi, E(\lambda)A\Psi\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(\lambda) d\langle A^*\Phi, E(\lambda)\Psi\rangle \\ &= \langle A^*\Phi, T_f\Psi\rangle = \langle \Phi, AT_f\Psi\rangle. \end{aligned}$$

したがって，$T_f A\Psi = AT_f\Psi$. □

2.9　スペクトル定理 (II)

この節では，非有界な自己共役演算子に対するスペクトル定理を証明する．まず，有界な自己共役演算子に対するスペクトル定理を応用することにより，正規演算子とよばれる演算子に対して，それが有界の場合に，スペクトル分解ができることを示す．ユニタリ演算子は有界な正規演算子の特別な場合である．したがって，正規演算子のスペクトル分解の特殊な場合として，ユニタリ演算子のスペクトル分解が得られる．一般に，自己共役演算子はユニタリ演算子を用いて一意的に表わされる（ケーリー変換）．これとユニタリ演算子のスペクトル分解を組み合わせることにより，所期の目的が達成される．

2.9.1　有界な正規演算子に対するスペクトル定理

H をヒルベルト空間とする．H 上の稠密に定義された閉演算子 A が $A^*A = AA^*$ をみたすとき，A を**正規演算子** (normal operator) という．

命題 2.74　H 上の有界演算子 A が正規であるための必要十分条件は，互いに可換な自己共役演算子 $B, C \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ が存在して，

$$A = B + iC \tag{2.149}$$

と表わされることである．この場合，B, C は A から一意的に定まる．

証明　任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ に対して，

$$B = \frac{A + A^*}{2}, \quad C = \frac{A - A^*}{2i} \tag{2.150}$$

とおけば，B, C は有界な自己共役演算子であり，(2.149) が成立する．容易にわかるように，

$$A^* = B - iC. \tag{2.151}$$

したがって，

$$A^*A = B^2 + C^2 + i(BC - CB),\ AA^* = B^2 + C^2 + i(CB - BC).$$

これから,

$$A^*A = AA^* \iff BC = CB.$$

ゆえに,求める結果を得る.(2.149) の B, C の一意性は,(2.149) から (2.151) が導かれ,したがって,(2.150) が成立することによる. □

注意 任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ に対して,(2.150) によって定義される有界な自己共演算子 B, C をそれぞれ,有界演算子 A の**実部**,**虚部**という.

補題 2.75 A, B を H 上の有界な自己共役演算子とし,これに同伴するスペクトル族を $\{E_A(\lambda)\}, \{E_B(\lambda)\}$ とする.このとき,A と B が可換であるための必要十分条件は $\{E_A(\lambda)\}$ と $\{E_B(\lambda)\}$ が可換になることである.この場合,

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda\, d(E_A \otimes E_B)(\lambda, \mu),\ B = \int_{\mathbb{R}^2} \mu\, d(E_A \otimes E_B)(\lambda, \mu), \quad (2.152)$$

と表わされる($E_A \otimes E_B$ は E_A と E_B の直積スペクトル測度;2.7 節の終わりの方を参照).

証明 (必要性)$A - \lambda = U_A(\lambda)|A - \lambda|, B - \mu = U_B(\mu)|B - \mu|,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, を極分解とする.ただし,$\ker(A - \lambda) = \ker U_A(\lambda), \ker(B - \lambda) = \ker U_B(\lambda)$, とする.定理 2.60(ii) によって,$U_A(\lambda)$ は $B - \mu$ と可換である.したがって,$U_A(\lambda)$ と $U_B(\mu)$ は可換.これと (2.123) によって,$\{E_A(\lambda)\}$ と $\{E_B(\mu)\}$ は可換である.

(十分性)$A,\ B$ のスペクトル表示を用いて証明される.

補題の条件がみたされている場合,定理 2.67 によって,直積スペクトル測度 $E_A \otimes E_B$ が一意的に定義される.このとき,$A,\ B$ のスペクトル表示と直積スペクトル測度の構成の仕方により,(2.152) が成立する. □

有界な正規演算子に対するスペクトル定理を証明しよう:

定理 2.76 A を H 上の有界な正規演算子とする.このとき,2 次元のスペクトル測度 E がただひとつ存在して,

$$A = \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda + i\mu) dE(\lambda, \mu) \quad (2.153)$$

と表わされる.

証明 命題 2.74 によって，H 上の可換な有界自己共役演算子 B, C が存在して，(2.149) が成立する．有界な自己共役演算子に対するスペクトル定理によって，スペクトル族 E_B, E_C が存在して，

$$B = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_B(\lambda), \quad C = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_C(\lambda),$$

が成立する．補題 2.75 によって，$E = E_B \otimes E_C$ とおけば，

$$B = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda dE(\lambda, \mu), \quad C = \int_{\mathbb{R}} \mu dE(\lambda, \mu),$$

と書ける．これと (2.149)，定理 2.71(vi) によって，(2.153) が得られる．

（一意性）(2.153) が成立するとすれば，

$$B := \frac{A + A^*}{2} = \int_{\mathbb{R}^2} \lambda dE(\lambda, \mu), C := \frac{A - A^*}{2i} = \int_{\mathbb{R}^2} \mu dE(\lambda, \mu).$$

$K \in \mathsf{B}^1$ に対して，$E_1(K) = E(K \times \mathbb{R}), E_2(K) = E(\mathbb{R} \times K)$ とすれば，E_1, E_2 は 1 次元のスペクトル測度であり，$B = \int_{\mathbb{R}} \lambda dE_1(\lambda), C = \int_{\mathbb{R}} \mu dE_2(\mu)$, となる．したがって，$E_1, E_2$ は自己共役演算子 B, C に同伴するスペクトル測度である．B, C は A から決まるから，E_1, E_2 は A から一意的に決まる．一方，$E_1(K)E_2(J) = E(K \times J), K, J \in \mathsf{B}^1$ であるから，$E = E_1 \otimes E_2$ でなければならない．したがって，E は A から一意的に定まる． □

2.9.2 ユニタリ演算子に対するスペクトル定理

H 上のユニタリ演算子 U は，$U^*U = I = UU^*$ をみたすので，正規演算子である．したがって，定理 2.76 があてはまる．だが，この場合，$U^*U = I$ であるので，もっと強いスペクトル定理が得られる：

定理 2.77 U を H 上のユニタリ演算子とする．このとき，スペクトル族 $\{F(\theta)\}$ で $\operatorname{supp} F \subset [0, 2\pi]$ となるものが存在し，

$$U = \int_{[0,2\pi]} e^{i\theta} dF(\theta) \tag{2.154}$$

が成立する．このようなスペクトル族 F はただひとつである．

証明　U は正規演算子であるから，定理 2.76 によって，

$$U = \int_{\mathbb{R}^2} (\lambda + i\mu) dE(\lambda, \mu) \tag{2.155}$$

となる，2 次元のスペクトル測度 E がただひとつ存在する．$f(\lambda, \mu) = \lambda + i\mu$ とおけば，これは連続関数であり，2.8 節の記号を使えば，$U = T_f$ と書ける（$d = 2$ の場合）．$\sigma(U) \subset \{z \in \mathbb{C} | |z| = 1\}$ であるから（定理 2.22），定理 2.71(ix) により，$\operatorname{supp} E \subset \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 | \lambda^2 + \mu^2 = 1\}$．そこで，$\theta \in (0, 2\pi]$ に対して，

$$S_\theta := \{(\cos\alpha, \sin\alpha) | 0 < \alpha \leq \theta\} \subset \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 | \lambda^2 + \mu^2 = 1\}$$

とし，

$$F(\theta) = E(S_\theta) \tag{2.156}$$

と定義する．このとき，$F(2\pi) = I$ である．$\theta > 2\pi$ ならば，$F(\theta) := I$, $\theta \leq 0$ ならば，$F(\theta) := 0$ として，射影演算子値関数 F の定義域を $\mathbb{R}$ 全体に拡張する．このとき，$\{F(\theta)\}_{\theta \in \mathbb{R}}$ は台を $[0, 2\pi]$ の中のもつスペクトル族であることを示すのはそれほど難しくない．さらに，(2.155) から (2.154) が導かれる．

F の一意性：(2.154) が成立するスペクトル族 $\{F(\theta)\}$ で $\operatorname{supp} F \subset [0, 2\pi]$ となるものがあったとすれば，前段の証明の逆をたどることにより，(2.156) が成立するような，2 次元のスペクトル測度 E で $\operatorname{supp} E \subset \{(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 | \lambda^2 + \mu^2 = 1\}$ をみたすものがつくれる．このとき，(2.154) は (2.155) を導く．したがって，正規演算子のスペクトル定理にいう一意性によって，F の一意性がでる．　□

2.9.3　ケーリー変換

A を H 上の対称演算子とする．このとき，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$\|(A + i)\Psi\|^2 = \|(A - i)\Psi\|^2$ が成立する．そこで，写像 $U : \mathsf{R}(A + i) \to \mathsf{H}$ を

$$U(A + i)\Psi = (A - i)\Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}(A), \tag{2.157}$$

によって定義する．この U を A の**ケーリー (Cayley) 変換**という．

A は自己共役であるとしよう．このとき，定理 2.41 によって，$\mathsf{R}(A \pm i) = \mathsf{H}$ である．したがって，この場合，U はユニタリになり，(2.157) は演算子の等式

$$U = (A - i)(A + i)^{-1} \tag{2.158}$$

と同等である．この右辺は $I - 2i(A + i)^{-1}$ と変形できるので，

$$I - U = 2i(A + i)^{-1}.$$

したがって，

$$\mathsf{R}(I - U) = \mathsf{D}(A), \quad \ker(I - U) = \{0\}. \tag{2.159}$$

(2.157) から，演算子の等式 $U(A + i) = A - i$ が成り立つ．両辺の共役をとり，命題 2.2(ii) と $U^* = U^{-1}$ を用いると，$(A - i) = (A + i)U$．したがって，$A(I - U) = i(I + U)$．これと (2.159) によって，演算子の等式

$$A = i(I + U)(I - U)^{-1} \tag{2.160}$$

が得られる．こうして，自己共役演算子はユニタリ演算子を用いて表わすことができる．

逆に，$\ker(I - U) = \{0\}$ をみたす，任意のユニタリ演算子 U に対して，(2.160) によって，A を定義すれば，A は自己共役であり，(2.157) が成立する．

以上の結果をまとめると次のようになる．

定理 2.78　$\mathfrak{S}(\mathsf{H})$ を H 上の自己共役演算子の全体，$\mathfrak{U}(\mathsf{H})$ を H 上のユニタリ演算子 U で $\ker(I - U) = \{0\}$ をみたすものの全体とすれば，$\mathfrak{S}(\mathsf{H})$ と $\mathfrak{U}(\mathsf{H})$ はケーリー変換によって，1 対 1 に対応する．

2.9.4　スペクトル定理の証明―非有界自己共役演算子の場合

スペクトル定理 2.55 を，A が非有界の場合に証明する．これで，スペクトル定理の証明が完結する．

前項の結果により，(2.160) をみたすユニタリ演算子 U が存在する．定理 2.77 により，U は (2.154) のようなスペクトル表示をもつ．いまの場合，$\ker(I - U) =$

$\{0\}$ であるから，$F(\{2\pi\}) = 0$（命題 2.54 の方法と同様にして示される）．したがって，$F(2\pi) = F(2\pi - 0) = I$．明らかに

$$I - U = \int_{[0,2\pi]} (1 - e^{i\theta}) dF(\theta).$$

これと定理 2.71(vii) によって，

$$(I - U)^{-1} = \int_{[0,2\pi]} (1 - e^{i\theta})^{-1} dF(\theta).$$

(2.160) と定理 2.71(vii) によって，

$$\begin{aligned} A &= i \int_{[0,2\pi]} \frac{1 + e^{i\theta}}{1 - e^{i\theta}} dF(\theta) \\ &= - \int_{[0,2\pi]} \cot \frac{\theta}{2}\, dF(\theta). \end{aligned}$$

任意の実数 λ に対して，$-\cot(\theta_\lambda/2) = \lambda$ となる $\theta_\lambda \in (0, 2\pi)$ がただひとつ存在する．この場合，$\theta_\lambda \uparrow 2\pi$ $(\lambda \uparrow \infty), \theta_\lambda \downarrow 0$ $(\lambda \downarrow -\infty)$．そこで，$E(\lambda) = F(\theta_\lambda)$ とおけば，$\{E(\lambda)\}$ はスペクトル族であり，スティルチェス積分の変数変換公式により，(2.102) を得る．

$\{E(\lambda)\}$ の一意性：(2.102) をみたすスペクトル族 E があったとする．このとき，$\theta \in (0, 2\pi)$ に対して，$F(\theta) := E(-\cot(\theta/2)), \theta \geq 2\pi$ のとき，$F(\theta) := I$，$\theta \leq 0$ のとき，$F(\theta) = 0$ と定義すれば，$\{F(\theta)\}$ はスペクトル族である．これを用いて，U を (2.154) によって定義すれば，定理 2.71(viii) によって，U はユニタリである．構成の仕方により，$F(\{2\pi\}) = 0$ であるから，$\ker(I - U) = \{0\}$．この F と U に関して，上記の変数変換を逆にたどることにより，(2.160) が成立することがわかる．一方，(2.160) は (2.158) を導く．したがって，U は A から一意的に決まることになる．したがって，F も A から一意的に決まるので，E もそうでなければならない．これで，スペクトル定理の証明が完結する．

自己共役演算子 A に対応するスペクトル族 $\{E(\lambda)\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ に同伴する 1 次元スペクトル測度を $\widetilde{E}$ とすれば，命題 2.62 によって，

$$A = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\widetilde{E}(\lambda) \tag{2.161}$$

とも表わされる．これも A のスペクトル分解あるいはスペクトル表示とよぶ．この表示も一意的である．$\widetilde{E}$ を **A に同伴する（対応する）スペクトル測度**という．

自己共役演算子のスペクトル表示に関して，基本的な例のひとつをあげておこう．

例 2.24　$F:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ をボレル可測関数 (ルベーグ測度に関して a.e. 有限）とし，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ において，関数 F によるかけ算演算子を M_F とする．すでに見たように，これは自己共役である．例 2.18 において，F が連続で単射の場合，

$$M_F = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_F(\lambda)$$

と書かれることを示した．したがって，スペクトル分解の一意性により，$\{E_F(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ は M_F に同伴するスペクトル族である．ここでは，F が一般の実数値ボレル可測関数である場合にも，$\{E_F(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ が M_F に同伴するスペクトル族であることを示そう．$\{E_F(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ に同伴する自己共役演算子を A_{E_F} とする：$A_{E_F} := \int_{\mathbb{R}} \lambda\, dE_F(\lambda)$．$f \in \mathsf{D}(M_F)$ とする．このとき，$f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ かつ

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2 |f(x)|^2 dx < \infty.$$

任意の $C \in \mathsf{B}^d$ に対して，

$$\mu(C) := \int_C |f(x)|^2 dx$$

とおくと，μ は $(\mathbb{R}^d, \mathsf{B}^d)$ 上の有界測度を定義する（$\mu(\mathbb{R}^d) = \|f\|^2 < \infty$）．各 $B \in \mathsf{B}^1$ に対して，

$$F^{-1}(B) := \{x \in \mathbb{R}^d |\ F(x) \in B\}$$

とし，$\mu_F(B) = \mu(F^{-1}(B))$ とおくと，μ_F は $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の有界測度であり，付録 A.8 の事実により，

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(F(x)) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda) d\mu_F(\lambda)$$

が成り立つ．ここで，$g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ は，両辺のどちらかの積分が存在するような，任意のボレル可測関数である．付録 A, 定理 A.13 によって，左辺は（存在すれば）$\int_{\mathbb{R}^d} g(F(x))|f(x)|^2dx$ に等しい．したがって，

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(F(x))|f(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\mu_F(\lambda)$$

を得る．一方，

$$\langle f, E_F(\lambda)f\rangle = \int_{F^{-1}((-\infty,\lambda])} |f(x)|^2dx = \mu(F^{-1}((-\infty,\lambda])) = \mu_F((-\infty,\lambda]).$$

したがって，

$$\int_{\mathbb{R}} g(\lambda)d\langle f, E_F(\lambda)f\rangle = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)d\mu_F(\lambda).$$

ゆえに，

$$\int_{\mathbb{R}^d} g(F(x))|f(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)d\langle f, E_F(\lambda)f\rangle \tag{2.162}$$

が得られる．そこで，$g(\lambda)=\lambda^2$ と選べば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |F(x)|^2|f(x)|^2dx = \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle f, E_F(\lambda)f\rangle$$

したがって，

$$f\in \mathsf{D}(M_F) \iff f\in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d), \quad \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\langle f, E_F(\lambda)f\rangle < \infty.$$

ゆえに，$\mathsf{D}(M_F)=\mathsf{D}(A_{E_F})\cdots(*)$．$f\in\mathsf{D}(M_F)=\mathsf{D}(A_{E_F})$ のとき，(2.162) において，$g(\lambda)=\lambda$ と選び，$\int_{\mathbb{R}^d} F(x)|f(x)|^2dx = \langle f, M_F f\rangle$ を使えば，

$$\langle f, M_F f\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\langle f, E_F(\lambda)f\rangle = \langle f, A_{E_F} f\rangle$$

が得られる．偏極恒等式を使えば，任意の $f,g\in\mathsf{D}(M_F)$ に対して，

$$\langle g, M_F f\rangle = \langle g, A_{E_F} f\rangle$$

が成り立つことになる．$\mathsf{D}(M_F)$ は稠密であるから，$M_F f = A_{E_F} f$ を得る．これと $(*)$ によって，$A_{E_F}=M_F$ が導かれる．よって，$\{E_F(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ が M_F に同伴するスペクトル族である．

2.9.5 自己共役演算子のスペクトルとスペクトル測度の関係

A をヒルベルト空間 H 上の自己共役演算子とし，$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を同伴するスペクトル族とする．$\{E(\lambda)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ に同伴するスペクトル測度を $\widetilde{E}$ とする．このとき，(2.161) が成立する．定理 2.71(ix) を $d=1$, $E=\widetilde{E}$, $f(\lambda)=\lambda$ の場合に応用すれば（この場合，$T_f=A$），

$$\sigma(A)=\mathrm{supp}\,\widetilde{E}=\mathrm{supp}\,E \tag{2.163}$$

を得る．ここで，2 番目の等号は，定理 2.63 による．こうして，**自己共役演算子のスペクトルは，同伴するスペクトル族あるいはスペクトル測度の台に等しい**ことがわかる．

2.9.6 固有ベクトルの完全正規直交系をもつ対称演算子とスペクトル分解

かけ算演算子とは異なる自己共役演算子のスペクトル分解の基本的な例をひとつ論述しておく．これは量子力学の具体的なモデルに応用をもつものである．H を可分なヒルベルト空間，H を H 上の対称演算子でその点スペクトルが

$$\sigma_{\mathrm{p}}(H)=\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$$

という形をもつとする．ただし，$j\neq k$ ならば $\lambda_j\neq\lambda_k$ とする．固有値 λ_n に対する固有空間

$$\mathsf{H}_n:=\ker(H-\lambda_n)$$

の閉包 $\bar{\mathsf{H}}_n$ 上への射影演算子を P_n とする．命題 2.33(ii) によって，$\bar{\mathsf{H}}_n\perp\bar{\mathsf{H}}_m$, $n\neq m$, であるから，

$$P_nP_m=0,\quad n\neq m.$$

$\bar{\mathsf{H}}_n$ の CONS を $\{\Psi_{n,j}\}_{j=1}^{d_n}$ とする（$\Psi_{n,j}\in\mathsf{H}_n$, d_n は高々可算とする）．このとき，$\{\Psi_{n,j}|\ n\in\mathbb{N},\ j=1,\cdots,d_n\}$ は H の正規直交系である（命題 2.33(ii)）．

次の仮定が成立する状況を考える．

(H) $\{\Psi_{n,j}|\ n\in\mathbb{N},\ j=1,\cdots,d_n\}$ は H の CONS である．

この仮定をみたす対称演算子 H は固有ベクトルの完全正規直交系をもつといわれる．

仮定 (H) から導かれる結果を調べよう．まず，(H) は，すべての $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_n}\langle \Psi_{n,j}, \Psi\rangle \Psi_{n,j}$$

が成り立つことを意味する．他方，$P_n\Psi = \sum_{j=1}^{d_n}\langle \Psi_{n,j}, \Psi\rangle \Psi_{n,j}$ であるから，$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} P_n\Psi$．したがって，

$$\text{s-}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} P_n = I \tag{2.164}$$

が成立する．これは

$$\mathsf{H} = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bar{\mathsf{H}}_n \tag{2.165}$$

を意味する．

命題 2.79　$\mathsf{D} := \widehat{\bigoplus}_{n=1}^{\infty}\mathsf{H}_n$ (H_n, $n \in \mathbb{N}$, の不完全無限直和; 1 章 1.1 節 1.1.8 項を参照）とすれば，H は D 上で本質的に自己共役であり，$\bar{H} = \overline{H \restriction \mathsf{D}}$ が成り立つ．

証明　$\Phi \in \mathsf{R}(H \restriction \mathsf{D} + i)^{\perp}$ とすれば，すべての $\Psi \in \mathsf{D}$ に対して，$\langle \Phi, (H + i)\Psi\rangle = 0$．特に，$\Psi$ として，$\Psi_{n,j}$ をとれば，$(H + i)\Psi_{n,j} = (\lambda_n + i)\Psi_{n,j}$ であり，$\lambda_n + i \neq 0$ であるから，$\langle \Phi, \Psi_{n,j}\rangle = 0$．これと仮定 (H) により，$\Phi = 0$．したがって，$\mathsf{R}(H \restriction \mathsf{D} + i)$ は稠密．同様にして，$\mathsf{R}(H \restriction \mathsf{D} - i)$ も稠密であることがわかる．ゆえに，定理 2.44 により，H は D 上で本質的に自己共役である．この結果と章末演習問題 22 により，2 番目の主張がしたがう．　□

命題 2.80

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\bar{H}) = \sigma_{\mathrm{p}}(H) = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \tag{2.166}$$

さらに，すべての $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\bar{\mathsf{H}}_n = \ker(\bar{H} - \lambda_n). \tag{2.167}$$

証明 $\bar{H}\Psi = \lambda\Psi$ ($\lambda \in \mathbb{R}$, $\Psi \neq 0$, $\Psi \in \mathsf{D}(\bar{H})$) とすれば，任意の (n,j) に対して，$\langle \Psi_{n,j}, \bar{H}\Psi \rangle = \langle \Psi_{n,j}, \lambda\Psi \rangle$. 左辺は，$\langle H\Psi_{n,j}, \Psi \rangle = \lambda_n \langle \Psi_{n,j}, \Psi \rangle$ と変形できるから，$(\lambda_n - \lambda)\langle \Psi_{n,j}, \Psi \rangle = 0$. したがって，もし，$\lambda \notin \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ ならば，すべての (n,j) に対して，$\langle \Psi_{n,j}, \Psi \rangle = 0$. これは，$\Psi = 0$ を意味する．したがって，そのような λ は $\bar{H}$ の固有値ではない．ゆえに，$\sigma_{\mathrm{p}}(\bar{H}) \subset \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$. 他方，逆の包含関係が成り立つのは明らか．ゆえに (2.166) が成立する．

(2.167) については，まず，$\bar{\mathsf{H}}_n \subset \ker(\bar{H} - \lambda_n) \cdots (*)$ は明らか．任意の $\Psi \in \ker(\bar{H} - \lambda_n)$ に対して，$\Psi = P_n\Psi + \sum_{m \neq n} P_m\Psi$ と書ける．一方，$P_m = P_m^*$, $P_m^2 = P_m$ を用いると，

$$\begin{aligned} \lambda_n \|P_m\Psi\|^2 &= \langle P_m\Psi, \lambda_n\Psi \rangle = \langle P_m\Psi, \bar{H}\Psi \rangle \\ &= \langle \bar{H}P_m\Psi, \Psi \rangle = \lambda_m \|P_m\Psi\|^2. \end{aligned}$$

したがって，$(\lambda_n - \lambda_m)\|P_m\Psi\|^2 = 0$. これは，$m \neq n$ ならば $P_m\Psi = 0$ を意味する．したがって，$\Psi = P_n\Psi \in \bar{\mathsf{H}}_n$. ゆえに $(*)$ の逆の包含関係が成り立つ． □

自己共役演算子 $\bar{H}$ のスペクトル表示を求めてみよう．このために，次の一般的な補題を証明する．

補題 2.81 A を閉エルミート演算子，λ を A の固有値とする．このとき，A は $\ker(A - \lambda)$ によって約される[*25].

証明 $\ker(A-\lambda)$ 上への射影演算子を P とする．$\Psi \in \mathsf{D}(A)$ ならば $P\Psi \in \mathsf{D}(A)$ であり，$AP\Psi = \lambda P\Psi$ であることは明らか．一方，$\ker(A - \lambda)$ の CONS を $\{\Phi_n\}_{n=1}^N$ ($N \leq \infty$) とすれば，$P\Phi = \sum_{n=1}^N \langle \Phi_n, \Phi \rangle \Phi_n$, $\Phi \in \mathsf{H}$. したがって，

$$PA\Psi = \sum_{n=1}^N \langle \Phi_n, A\Psi \rangle \Phi_n = \sum_{n=1}^N \langle A\Phi_n, \Psi \rangle \Phi_n = \lambda \sum_{n=1}^N \langle \Phi_n, \Psi \rangle \Phi_n = \lambda P\Psi.$$

[*25] $A - \lambda$ は閉であるから，$\ker(A - \lambda)$ は閉部分空間である．補題 2.37 を参照．

ここで，A のエルミート性を用いた．ゆえに，$AP\Psi = PA\Psi$．よって題意が成立する． □

$\Psi \in \mathsf{D}(\bar{H})$ としよう．$N < \infty$ に対して，

$$\Psi_N = \sum_{j=1}^{N} P_n \Psi$$

とおけば，$\Psi_N \in \mathsf{D}(\bar{H})$ であり，$\Psi_N \to \Psi \ (N \to \infty)$ かつ

$$\bar{H}\Psi_N = \sum_{j=1}^{N} \lambda_n P_n \Psi.$$

一方，補題 2.81 と命題 2.80 によって，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^2 \|P_n\Psi\|^2 &= \sum_{n=1}^{N} \|\bar{H}P_n\Psi\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|P_n\bar{H}\Psi\|^2 \\ &= \langle \bar{H}\Psi, \sum_{n=1}^{N} P_n\bar{H}\Psi\rangle \\ &\to \|\bar{H}\Psi\|^2 \ (n \to \infty).\end{aligned}$$

したがって，

$$\|\bar{H}\Psi\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \|P_n\Psi\|^2 < \infty.$$

したがって，$\{\bar{H}\Psi_N\}_{N=1}^{\infty}$ は H-収束する．ゆえに，$\bar{H}$ の閉性により，

$$\bar{H}\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n \Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}(\bar{H}), \tag{2.168}$$

が得られる．

(2.164) によって，各 1 次元ボレル集合 B に対して，

$$E_H(B) := \text{s-}\lim_{N\to\infty} \sum_{\lambda_n \in B\cap[-N,N]} P_n$$

が定義される．例 2.21 によって，$\{E_H(B)|\, B \in \mathsf{B}^1\}$ は 1 次元のスペクトル測度であり，S を $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ の集積点全体とすれば，

$$\operatorname{supp} E_H = \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \cup S \tag{2.169}$$

である．(2.168) から，任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ と $\Psi \in \mathsf{D}(\bar{H})$ に対して，

$$\langle \Phi, \bar{H}\Psi \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle \Phi, P_n \Psi \rangle.$$

(2.169) と $E_H(S) = 0$ によって，上式の右辺は，$\int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \Phi, E_H(\lambda)\Psi \rangle$ に等しい．したがって，

$$\langle \Phi, \bar{H}\Psi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\langle \Phi, E_H(\lambda)\Psi \rangle. \tag{2.170}$$

スペクトル測度の一意性により，$\bar{H}$ のスペクトル測度は $\{E_H(B)|B \in \mathsf{B}^1\}$ であることが結論される．$\bar{H}$ のスペクトル分解は，あらわな形としては，(2.168) によってあたえられる．

以上の事実に基づいて，$\bar{H}$ のスペクトルについて次の結果が得られる．

命題 2.82

$$\sigma(\bar{H}) = \overline{\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}}.$$

証明　上に示したように E_H は $\bar{H}$ のスペクトル測度である．この事実と (2.163), (2.169) にから求める結果を得る．□

2.10　自己共役演算子の関数とスペクトル

H をヒルベルト空間，A を H 上の自己共役演算子とする．スペクトル定理（定理 2.55）によって，(2.102) が成立するようなスペクトル族 $\{E(\lambda)\}$ がただひとつ存在する．以下，このスペクトル族に同伴する 1 次元スペクトル測度も

同じ記号 E で表わす．2.8 節で展開した演算子解析により，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，演算子

$$f(A) := \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) dE(\lambda) \tag{2.171}$$

が定義される．すなわち，$f(A)$ は

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(f(A)) &:= \left\{ \Psi \in \mathsf{H} \middle| \int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\langle \Psi, E(\lambda)\Psi \rangle < \infty \right\}, \\ \langle \Phi, f(A)\Psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle \Phi, E(\lambda)\Psi \rangle, \ \Psi \in \mathsf{D}(f(A)), \Phi \in \mathsf{H}, \end{aligned}$$

をみたす演算子である．2.8 節の記号にしたがえば，$f(A) = T_f$ （$d = 1$ の場合）である．対応 $f : A \to f(A)$ は $\mathfrak{S}(\mathsf{H})$ （H 上の自己共役演算子の全体）から H 上の演算子の集合の中への写像をあたえる．こうして，スペクトル定理を介して，自己共役演算子の “関数” が定義される．

例 2.25　$\bar{H}$ を 2.9.6 項の自己共役演算子としよう．このとき，$\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ 上で有限の値をとる，$\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，

$$\begin{aligned} \mathsf{D}(f(\bar{H})) &= \left\{ \Psi \in \mathsf{H} \middle| \sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)|^2 \|P_n\Psi\|^2 < \infty \right\}, \\ f(\bar{H}) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n \Psi, \quad \Psi \in \mathsf{D}(f(\bar{H})). \end{aligned}$$

実際，$\Psi \in \mathsf{D}(f(\bar{H}))$ であることは

$$\int_{\mathbb{R}} |f(\lambda)|^2 d\|E_H(\lambda)\Psi\|^2 < \infty$$

と同値である．他方，(2.169) と $E_H(S) = 0$ によって，左辺は，

$$\sum_{n=1}^{\infty} |f(\lambda_n)|^2 \|P_n\Psi\|^2$$

に等しい．したがって，$\mathsf{D}(f(\bar{H}))$ に対する結果を得る．いま示した，$f(\bar{H})$ の定義域の性質により，任意の $\Psi \in \mathsf{D}(f(\bar{H}))$ に対して，$\Xi := \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n \Psi$

は強収束する．したがって，任意の $\Phi \in \mathsf{H}$ に対して，

$$\begin{aligned}\langle \Phi, \Xi \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n)\langle \Phi, P_n\Psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(\lambda) d\langle \Phi, E_H(\lambda)\Psi \rangle \\ &= \langle \Phi, f(\bar{H})\Psi \rangle.\end{aligned}$$

ゆえに，$\Xi = f(\bar{H})\Psi$.

さて，自己共役演算子 A の関数について，まず，次のような疑問を解消しておく必要がある．すなわち，P を実数 λ の多項式で $P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$ $(a_n \neq 0)$ とするとき，上記の意味で定義される $P(A)$ と演算子 $\sum_{j=0}^{n} a_j A^j$ は一致するであろうか？　次の定理で証明するように，このような疑問に対する答は，レゾルヴェントの記法の場合も含めて，肯定的である．したがって，記法 (2.171) は整合的である．

定理 2.83　n を任意の自然数とする．

(i)　$P_n(\lambda) = \lambda^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, ならば，

$$P_n(A) = A^n. \tag{2.172}$$

特に，A^n は自己共役である[*26].

(ii)　$P(\lambda) = \sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $(a_j \in \mathbb{C}, j = 0, \cdots, n, a_n \neq 0)$, ならば，

$$P(A) = \sum_{j=0}^{n} a_j A^j. \tag{2.173}$$

特に，$a_j, j = 0, 1, \cdots, n$, が実数ならば，$\sum_{j=0}^{n} a_j A^j$ は自己共役である．

(iii)　$f(\lambda) = (\lambda - z)^{-1}$ $(\lambda \in \mathbb{R},\ z \in \varrho(A))$ ならば，$f(A) = R_z(A)$.

証明　(i) n に関する帰納法で示す．$n = 1$ の場合は自明．$n = k \geq 1$ の場合に (2.172) が成立したとする．$P_{k+1}(\lambda) = P_k(\lambda)P_1(\lambda)$ であるから，定理 2.71(vii)

*26「A が自己共役ならば A^n は自己共役である」という事実はスペクトル表示を用いなくても証明することができる（章末演習問題 5 を参照）．

によって，$\mathsf{D}(P_{k+1}(A)) \cap \mathsf{D}(A) = \mathsf{D}(P_k(A)A)$ かつ $P_k(A)A \subset P_{k+1}(A)$．したがって，$A^{k+1} \subset P_{k+1}(A)$．初等的な不等式

$$|\lambda| \leq |\lambda|^{k+1} + 1$$

を用いると，$\Psi \in \mathsf{D}(P_{k+1}(A))$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 d\|E(\lambda)\Psi\| \leq 2\int_{\mathbb{R}} |\lambda|^{2(k+1)} d\|E(\lambda)\Psi\|^2 + 2\|\Psi\|^2 < \infty.$$

したがって，$\Psi \in \mathsf{D}(A)$．よって，$\mathsf{D}(P_{k+1}(A)) = \mathsf{D}(P_k(A)A) = \mathsf{D}(A^{k+1})$．ゆえに，(2.172) は $n = k+1$ でも成り立つ．P_n は実数値連続関数であるから，$P_n(A)$ は自己共役である．したがって，A^n は自己共役である．

(ii) 定理 2.71(vi) といま証明した (i) によって，$\sum_{j=0}^n a_j A^j \subset P(A)$．演算子の和の定義と $\mathsf{D}(A) \supset \mathsf{D}(A^2) \supset \cdots \supset \mathsf{D}(A^n)$ によって，$\mathsf{D}(\sum_{j=0}^n a_j A^j) = \mathsf{D}(A^n)$．したがって，

$$\mathsf{D}(P(A)) \subset \mathsf{D}(A^n) = \mathsf{D}(P_n(A))$$

を示せばよい．多項式 P は

$$P(\lambda) = a_n P_n(\lambda)(1 + Q(\lambda)), \quad Q(\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j}{a_n} \lambda^{j-n},$$

と変形できる．$|Q(\lambda)| \to 0$ $(|\lambda| \to \infty)$ であるから，$R > 0$ を十分大きくとれば，$|\lambda| \geq R$ のとき，$|Q(\lambda)| < 1/2$ が成り立つ．したがって，$|\lambda| \geq R$ のとき，$|P_n(\lambda)| \leq 2|P(\lambda)|/|a_n|$．ゆえに，$|P_n(\lambda)| \leq 2|a_n|^{-1}|P(\lambda)| + R^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$, という評価が得られる．この不等式は，$\mathsf{D}(P(A)) \subset \mathsf{D}(P_n(A))$ を導く．

(iii) $f(\lambda)(\lambda - z) = 1 = (\lambda - z)f(\lambda)$ と定理 2.71(vii) によって，$f(A)(A-z) \subset I, (A-z)f(A) \subset I$．第 1 番目の式から，$f(A) = R_z(A)$ が得られる．□

2.8 節で議論した演算子値汎関数 $\mathbb{T} : f \to T_f$ の諸性質（定理 2.71) は，対応：$f \to f(A)$ の性質として，書き直すことができる．ここでは，スペクトルに関する性質だけを書き留めておく．

定理 2.84

(i) 任意の実数 λ に対して，

$$\ker(A-\lambda)=\mathsf{R}(E(\{\lambda\}))$$

(ii) λ が A の固有値で，Ψ が λ に属する，A の固有ベクトルならば，$\mathbb{R}$ 上のいたるところ有限な任意のボレル可測関数 f に対して

$$f(A)\Psi=f(\lambda)\Psi.$$

(iii) **スペクトル写像定理** (spectral mapping theorem). f を $\mathbb{R}$ 上の任意の連続関数とすると

$$\sigma(f(A))=\overline{f(\sigma(A))}.$$

(iv) $\mathbb{R}$ 上のボレル可測関数 f が $\sigma(A)$ 上で有界ならば，$f(A)$ は有界であり，

$$\|f(A)\|\le\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|f(\lambda)| \tag{2.174}$$

が成り立つ．

証明 (i) 命題 2.54(ii) による．

(ii) (i) によって，$E(\{\lambda\})\Psi=\Psi$．したがって，測度 $\langle\Psi,E(\cdot)\Psi\rangle$ の台は $\{\lambda\}$ である．ゆえに，

$$\|f(A)\Psi-f(\lambda)\Psi\|^2=\int_R|f(\mu)-f(\lambda)|^2d\langle\Psi,E(\mu)\Psi\rangle=0.$$

(iii) これは定理 2.71(ix) と 2.9.5 項で述べた事実 (2.163) による．

(iv) (2.174) の右辺を C とおく．(2.163) により，任意の $\Psi\in\mathsf{H}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)\Psi\|^2 &= \int_{\sigma(A)}|f(\lambda)|^2d\|E(\lambda)\Psi\|^2\\ &\le C^2\|\Psi\|^2<\infty.\end{aligned}$$

したがって，$\mathsf{D}(f(A))=\mathsf{H}$ で $f(A)$ は有界であり，$\|f(A)\|\le C$ が成り立つ． □

自己共役演算子 A が非負のとき，$\operatorname{supp} E = \sigma(A) \subset [0, \infty)$（定理 2.40(ii)）であるから，任意の正の実数 α に対して，A のべき A^α が

$$A^\alpha := \int_{[0,\infty)} \lambda^\alpha dE(\lambda) \tag{2.175}$$

によって定義される．これは非負の自己共役演算子である．特に，$\alpha = 1/2$ の場合，すなわち，$A^{1/2}$ を A の**平方根**という．実際，演算子解析から，

$$\left(A^{1/2}\right)^2 = A \tag{2.176}$$

が成立することがわかる．$A^{1/2} = \sqrt{A}$ と書く場合もある．スペクトル写像定理（定理 2.84(iii)）により

$$\sigma(A^\alpha) = \{\lambda^\alpha \mid \lambda \in \sigma(A)\} \tag{2.177}$$

が成り立つ（右辺の集合は閉集合であることに注意）．

A が一般の自己共役演算子の場合，関数 $\lambda \to |\lambda|$ に対応する演算子を $|A|$ と記し，A の絶対値という：

$$|A| := \int_{\mathbb{R}} |\lambda| \, dE(\lambda). \tag{2.178}$$

A が有界の場合は，これは，(2.103) によって定義される，A の絶対値に一致する．実際，(2.178) の右辺によって定義される演算子を B とすれば—これは，非負自己共役—，演算子解析により，$B^2 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda|^2 \, dE(\lambda) = A^2$ であるから，平方根の一意性により，$B = \sqrt{A^2} = |A|$．したがって，定義 (2.178) は，自己共役演算子の絶対値の概念を非有界の場合に拡張したものである．

2.11 自己共役演算子の極分解

2.6.3 項で，有界演算子の極分解を議論した．自己共役演算子 A のスペクトル分解を使うと，A が非有界の場合を含めて，$A - \lambda (\lambda \in \mathbb{R})$ に対する極分解を求めることができる．まず，$U(\lambda)$ を (2.120) によって定義し（ただし，E はいま考えている自己共役演算子 A のスペクトル測度とする），$T := U(\lambda)|A - \lambda|$

とする．このとき，$T = A - \lambda$ を示そう．任意の $\Phi \in \mathsf{H}, \Psi \in D(|A-\lambda|)$ に対して，スペクトル表示により，

$$\begin{aligned}\langle \Phi, T\Psi \rangle &= \int_{\mathbb{R}} |\mu - \lambda| \, d\langle U(\lambda)^*\Phi, E(\mu)\Psi \rangle \\ &= \int_{\mu>\lambda} (\mu - \lambda) \, d\langle U(\lambda)^*\Phi, E(\mu)\Psi \rangle \\ &\quad - \int_{\mu<\lambda} (\mu - \lambda) \, d\langle U(\lambda)^*\Phi, E(\mu)\Psi \rangle.\end{aligned}$$

ここで，対応 $\mu :\to |\mu - \lambda|$ は連続関数をあたえるから，積分はスティルチェス積分で考えてよい（つまり，$E(\mu)$ と $E((-\infty, \mu])$ を同一視する）（命題 2.62）．この場合，

$$U(\lambda)E(\mu) = \begin{cases} E(\mu) - E(\lambda) - E(\lambda - 0) & ; \mu > \lambda \\ -E(\mu) & ; \mu < \lambda \end{cases}$$

となるから，

$$\begin{aligned}\langle \Phi, T\Psi \rangle &= \int_{\mu>\lambda} (\mu - \lambda) \, d\langle \Phi, E(\mu)\Psi \rangle + \int_{\mu<\lambda} (\mu - \lambda) \, d\langle \Phi, E(\mu)\Psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} (\mu - \lambda) \, d\langle \Phi, E(\mu)\Psi \rangle \\ &= \langle \Phi, (A - \lambda)\Psi \rangle.\end{aligned}$$

したがって，$T\Psi = (A-\lambda)\Psi$．容易にわかるように，$D(A-\lambda) = D(|A-\lambda|) = D(A)$ であるから，以上から，

$$A - \lambda = U(\lambda)|A - \lambda| \tag{2.179}$$

を得る．さらに，

$$\ker U(\lambda) = \ker(A - \lambda) \tag{2.180}$$

が成り立つ．実際，$\Psi \in \ker U(\lambda)$ ならば，$\Psi = [E(\lambda) + E(\lambda - 0)]\Psi$ であるから，$E(\lambda)\Psi = \Psi$．また，$E(\lambda-0)\Psi = 2E(\lambda-0)\Psi$，したがって，$E(\lambda-0)\Psi = 0$．ゆえに，$E(\{\lambda\})\Psi = \Psi \ldots (*)$．これは，$\Psi \in \ker(A-\lambda)$ を意味する（定理 2.84(i)）．

逆に，$\Psi \in \ker(A-\lambda)$ とすれば，$(*)$ より，$U(\lambda)\Psi = U(\lambda)[E(\lambda)-E(\lambda-0)]\Psi = 0$．したがって，$\Psi \in \ker U(\lambda)$．こうして，(2.180) が示される．

有界演算子の場合の極分解の拡張として，(2.179) を自己共役演算子 $A-\lambda$ の**標準極分解**という．

第 2 章　演習問題

以下の問題において，H, K は複素ヒルベルト空間を表わす．

1. $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ 上の演算子 p_1 を次のように定義する：

$$\mathsf{D}(p_1) := \{f \in \mathrm{AC}^2[0,2\pi] | f(0) = 0\}, \quad (p_1 f)(x) := -if'(x),\ x \in [0,2\pi].$$

(i) p_1 は稠密に定義された閉演算子であることを証明せよ．

(ii) p_1 は対称演算子ではないことを証明せよ．

(iii) $z \in \mathbb{C}$ に対して，

$$(S_z g)(x) = i\int_0^x e^{iz(x-y)} g(y)dy,\ x \in [0,2\pi], g \in \mathsf{L}^2([0,2\pi])$$

によって定義される，$\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ 上の演算子 S_z は有界であることを証明せよ．

(iv) $(p_1 - z)S_z = I, S_z(p_1 - z) \subset I$ を証明せよ．

(v) $\sigma(p_1) = \emptyset$ を証明せよ．

注意． この例は，スペクトルが空集合となる非有界線形演算子の非自明な例のひとつである．

2. $\mathsf{L}^2([0,2\pi])$ 上の演算子 p_2 を次のように定義する：

$$\mathsf{D}(p_1) := \mathsf{C}^1[0,2\pi], \quad (p_2 f)(x) = -if'(x),\ x \in [0,2\pi].$$

(i) p_2 は可閉であることを証明せよ．

(ii) $\sigma(\bar{p}_2) = \sigma_{\mathrm{p}}(\bar{p}_2) = \mathbb{C}$ を証明せよ．

注意． この例は，問題 1 の例とは対照的に，スペクトルが $\mathbb{C}$ 全体（したがって，レゾルヴェント集合が空）となる非有界線形演算子の非自明な例をあたえる．

問題 1, 2 は，作用の形が同じ演算子でも，定義域が異なれば，スペクトルの特性は一般には著しく異なりうることを教える．この意味で，演算子の定義域というのは，演算子の本質的な要素であることがわかる．非有界演算子を扱う場合には，定義域に十分注意する必要があるのである．

3. A を H 上の有界な自己共役演算子とする．

(i)

$$\|A\| = \sup_{\|\Psi\|=1} |\langle \Psi, A\Psi \rangle|$$

を証明せよ．

ヒント：$a = \sup_{\|\Psi\|=1} |\langle \Psi, A\Psi\rangle|$ とおけば，$\alpha \le \|A\|$ は容易にわかる．逆の不等式を示すために，偏極恒等式からしたがう等式

$$\mathrm{Re}\langle \Psi, A\Phi\rangle = \frac{1}{4}[\langle \Psi+\Phi, A(\Psi+\Phi)\rangle - \langle \Psi-\Phi, A(\Psi-\Phi)\rangle]$$

と $|\langle \eta, A\eta\rangle| \le \alpha\|\eta\|^2, \eta \in \mathsf{H}$ から，まず，

$$\mathrm{Re}\langle \Psi, A\Phi\rangle \le \alpha, \quad \|\Psi\| = \|\Phi\| = 1,$$

を導く．$\mathrm{Arg}\langle \Psi, A\Phi\rangle = \theta \in [0, 2\pi)$（複素数 $\langle \Psi, A\Phi\rangle$ の偏角）とすれば，

$$|\langle \Psi, A\Phi\rangle| = \langle \Psi, A\Phi\rangle e^{-i\theta} = \langle e^{i\theta}\Psi, A\Phi\rangle$$

であるから，$|\langle \Psi, A\Phi\rangle| = \mathrm{Re}\langle e^{i\theta}\Psi, A\Phi\rangle$．これと上の評価および

$$\|A\| = \sup_{\|\Psi\|=1} \|A\Psi\| = \sup_{\|\Psi\|=\|\Phi\|=1} |\langle \Phi, A\Psi\rangle|$$

を用いればよい．

(ii) 任意の自然数 $n \ge 1$ に対して，A^n は自己共役であることを証明せよ．

(iii) 任意の自然数 n に対して，$\|A^n\| = \|A\|^n$ が成り立つことを証明せよ．

ヒント：(i) を利用して，漸化不等式 $\|A^n\| \ge \|A^{n-2}\|\,\|A\|^2$ を導け．

注意． H 上の有界演算子 A が自己共役でない場合，(i), (iii) は一般には成立しない．反例は，2×2 行列を用いて，容易につくることができる．

4. 任意の $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ に対して，$\|A^*A\| = \|A\|^2$ が成立することを証明せよ．

ヒント：A^*A は有界な自己共役演算子であるから，前問 (i) によって，$\|A^*A\| = \sup_{\|\Psi\|=1} |\langle \Psi, A^*A\Psi\rangle| = \sup_{\|\Psi\|=1} \|A\Psi\|^2$．

5. A を H 上の自己共役演算子とする．

(i) 任意の自然数 n に対して，A^n も自己共役であることを（スペクトル定理を用いずに）証明せよ．

ヒント：$A^n \pm i$ を“因数分解”することにより，$\mathsf{R}(A^n \pm i) = \mathsf{H}$ を証明せよ．

(ii) $A \ne 0$ ならば，すべての自然数 n に対して，$A^n \ne 0$ を証明せよ．

ヒント：任意の $\Psi \in \mathsf{D}(A^n)$ に対して，n が偶数ならば，$\langle \Psi, A^n\Psi\rangle = \|A^{n/2}\Psi\|^2$，$n$ が奇数ならば，$\langle A\Psi, A^n\Psi\rangle = \|A^{(n+1)/2}\Psi\|^2$ と書けることに注意して，まず，ある n に対して，$A^n = 0$ ならば，$\mathsf{D}(A^n)$ 上で $A = 0$ を示せ．

6. A_n，$A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H}, \mathsf{K})$，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$ ならば，$\text{w-}\lim_{n\to\infty} A_n^* = A^*$ を証明せよ．

7. A, B は H 上の有界な非負自己共役演算子で可換であるとする．このとき，$AB \geq 0$ を証明せよ．

ヒント：$B = (B^{1/2})^2$ と書き，$B^{1/2}$ と A は可換となることを用いよ．

8. H 上の有界演算子 A に対して，

$$r(A) := \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

を A の**スペクトル半径** (spectral radius) という．

(i)　第 1 章演習問題 30 を利用して，

$$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}$$

を証明せよ．

ヒント：$\lambda \to R_\lambda(A)$ は $\varrho(A)$ 上の $\mathfrak{B}$(H)-値正則関数である．$R_\lambda(A)$ の $\lambda = \infty$ でのローラン展開は $R_\lambda(A) = -\sum_{n=0}^{\infty} A^n/\lambda^{n+1}$ であり，これは，$\lambda \in \varrho(A)$ ならば成立する．したがって，その収束半径を R とすれば，$R \leq r(A)^{-1}$．他方，$\{\lambda \,|\, |\lambda| > r(A)\} \subset \varrho(A)$ であるから，$R \geq r(A)^{-1}$．したがって，$R = r(A)^{-1}$．収束半径に関するアダマールの定理の演算子値関数版によって，

$$R = \left(\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}\right)^{-1}$$

であるから，$r(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}$．

(ii)　A が自己共役ならば，$r(A) = \|A\|$ であることを証明せよ．

ヒント：問題 3(iii)．

9. H 上の射影演算子 $P_1, \cdots, P_n$ の和 $P_1 + \cdots + P_n$ が射影演算子であるための必要十分条件は，$j \neq k$ をみたすすべての $j, k = 1, \cdots, n$ に対して，$P_j P_k = 0$ となることである．これを証明せよ．

ヒント：$P_1 + \cdots + P_n$ が射影演算子のとき，$\Psi \in \mathsf{R}(P_n)$ ならば，$\|P_n \Psi\|^2 = \|\Psi\|^2 \geq |\langle \Psi, (P_1 + \cdots + P_n)\Psi \rangle| = \sum_{j=1}^{n} \|P_j \Psi\|^2$（$P_1 + \cdots + P_n$ は有界な自己共役演算子なので，問題 3(i) の公式が使える）．ゆえに，$P_j \Psi = 0, j = 1, \cdots, n-1$．これは，$P_j P_n = 0$, $j = 1, \cdots, n-1$, を意味する．他の場合も同様．

10. H 上の射影演算子 P, Q の積 PQ が射影演算子であるための必要十分条件は，$PQ = QP$ であることを証明せよ．このとき，$\mathsf{R}(P) = \mathsf{M}$, $\mathsf{R}(Q) = \mathsf{N}$ とすると，$\mathsf{R}(PQ) = \mathsf{M} \cap \mathsf{N}$ であることを証明せよ．

11. P と Q を H 上の射影演算子とする．$PQ = QP$ としよう．

(i)　$P + Q - PQ$, $P + Q - 2PQ$ はいずれも射影演算子であることを証明せよ．

(ii) $\mathsf{M} = \mathsf{R}(P)$, $\mathsf{N} = \mathsf{R}(Q)$ とする．このとき，$\mathsf{R}(P+Q-PQ) = (\mathsf{M} \cap \mathsf{N}^{\perp}) \bigoplus \mathsf{N}$, $\mathsf{R}(P+Q-2PQ) = (\mathsf{M} \cap \mathsf{N}^{\perp}) \bigoplus (\mathsf{M}^{\perp} \cap \mathsf{N})$ であることを証明せよ．

12. $A_n \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$, $n \in \mathbb{N}$, かつ $\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H})$ ならば,

$$\text{s-}\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} A_k}{n} = A$$

を証明せよ．

13. $A_n \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$, $n \in \mathbb{N}$, かつ $\sup_{n\geq 1} \|A_n\| < \infty$ とし，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\lim_{n\to\infty} A_n\Psi$ が存在するとする．このとき，$\text{s-}\lim_{n\to\infty} A_n = A$ となる $A \in \mathfrak{B}(\mathsf{H},\mathsf{K})$ が存在することを証明せよ．

14. A は H 上のエルミート演算子で $A \geq 0$ をみたすとする．このとき，任意の Ψ, $\Phi \in \mathsf{D}(A)$ に対して，$|\langle\Psi, A\Phi\rangle|^2 \leq \langle\Psi, A\Psi\rangle\langle\Phi, A\Phi\rangle$ が成立することを証明せよ．

ヒント：$\mathsf{D}(A)$ 上の準双線形形式 $s(\Psi,\Phi) := \langle\Psi, A\Phi\rangle$, $\Psi, \Phi \in \mathsf{D}(A)$, が半正定値内積であることに注意して，シュヴァルツの不等式を適用せよ．

15. A を H 上の有界な自己共役演算子で，$0 \leq A \leq cI$ をみたすとする（c は実定数）．このとき，任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，$\|A\Psi\|^2 \leq c\langle\Psi, A\Psi\rangle$ を証明せよ．

ヒント：$\|A\Psi\|^2 = \langle\Psi, A(A\Psi)\rangle$ と書けることに注意して，前問を応用せよ．または，$A^2 = A^{1/2}AA^{1/2}$ と書けることを利用してもよい．

16. H_n, $n = 1, 2, \cdots$, を H 上の有界な自己共役演算子とする．

(i) $H_1 \leq H_2 \leq \cdots \leq cI$ (c は実定数) ならば，有界な自己共役演算子 H で $H := \text{s-}\lim_{n\to\infty} H_n$, $H_n \leq H \leq cI$, $n \in \mathbb{N}$, をみたすものが存在することを証明せよ．

ヒント：任意の $\Psi \in \mathsf{H}$ に対して，数列 $\{\langle\Psi, H_n\Psi\rangle\}_{n=1}^{\infty}$ は非減少で，$-\|H_1\|\,\|\Psi\|^2 \leq \langle\Psi, H_n\Psi\rangle \leq c\|\Psi\|^2$ が成り立つことに注意して，$F(\Psi) := \lim_{n\to\infty}\langle\Psi, H_n\Psi\rangle$ の存在を示し，この汎関数が定理 2.66 の仮定をみたすことを証明せよ．強収束については，前問の不等式を使え．

(ii) $H_1 \geq H_2 \geq \cdots \geq bI$ (b は実定数) ならば，有界な自己共役演算子 H で，$H := \text{s-}\lim_{n\to\infty} H_n$, $H_n \geq H \geq bI$, $n \in \mathbb{N}$, をみたすものが存在することを証明せよ．

ヒント：$H_n' = -H_n$ とおいて考えよ．

17. P と Q を H 上の射影演算子とし，$H = PQP$ とおく．

(i) H は有界な非負自己共役演算子であること，および $\|H\| \leq 1$ を証明せよ．

(ii) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して，$0 \leq \cdots \leq H^n \leq H^{n-1} \leq \cdots \leq H^2 \leq H \leq I$ を証明せよ．

ヒント：(i) から $I - H \geq 0$. $I - H$ と H は可換であるから，問題 7 によって，$(I - H)H \geq 0$. これは，$H^2 \leq H$ を意味する．同様にして，$n = 2m$ のとき，$0 \leq (I - H)H^{2m} = H^n - H^{n+1}$. $n = 2m + 1$ のとき，$0 \leq (H - H^2)H^{2m} = H^n - H^{n+1}$.

(iii) 強極限 $S := \text{s-}\lim_{n\to\infty} H^n$ が存在し，S は $\mathsf{R}(P) \cap \mathsf{R}(Q)$ への射影演算子であることを証明せよ．

ヒント：問題 16(ii).

(iv) $\text{s-}\lim_{n\to\infty}(PQ)^n = S$ を証明せよ．

ヒント：$(PQ)^n = H^{n-1}Q$ と書ける．

18. H 上の有界演算子 A がべき等，すなわち，$A = A^2$ をみたすならば，$\sigma_{\mathrm{p}}(A) \subset \{0, 1\}$ を証明せよ．

19. A を H 上の有界自己共役演算子で，$\|A\| \leq 1$ をみたすものとする．

(i) $I - A^2 \geq 0$ を証明せよ．

(ii) (i) から補題 2.56（p.173）によって $I - A^2$ の平方根 $(I - A^2)^{1/2}$ が定義される．$U_\pm := A \pm i(I - A^2)^{1/2}$ とおくと，$U_\pm$ はユニタリであり，$A = (U_+ + U_-)/2$ と書けることを証明せよ．

20. 前問を利用し，H 上の任意の有界自己共役演算子 A は，A と可換な 2 個のユニタリ演算子の一次結合として表わされることを証明せよ．

21. 前問を利用し，H 上の任意の有界演算子は，4 個のユニタリ演算子の一次結合として表わされることを証明せよ．

22. A を H 上の対称演算子，$\mathsf{D} \subset \mathsf{D}(A)$ を稠密な部分空間とし，$A \restriction \mathsf{D}$ は本質的に自己共役であるとする．このとき，A は本質的に自己共役であり，$\overline{A \restriction \mathsf{D}} = \bar{A}$ が成立することを証明せよ．

23. (i) A を H 上の自己共役演算子とする．このとき，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$aA + b$ は自己共役であることを証明せよ．

(ii) A を H 上の対称演算子とする．A が稠密な部分空間 D 上で本質的に自己共役ならば，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，$aA + b$ も D 上で本質的に自己共役であり，$\overline{aA + b} = a\bar{A} + b$ が成り立つことを証明せよ．

24. 例 2.8 の演算子 S（右シフト演算子）について，次を証明せよ．

(i) $S^*S = I, \|S\| = 1$ を示せ．

(ii) $\sigma_p(S) = \emptyset$.

(iii) $0 \leq |\lambda| < 1(\lambda \in \mathbb{C})$ のとき，$\Lambda := \{\bar{\lambda}^{n-1}\}_{n=1}^\infty$ とすれば，$\Lambda \in l^2$ であり，$\mathsf{R}(S - 1)^\perp = \{c\Lambda | c \in \mathbb{C}\}$ であることを示せ．

(iv) $|\lambda| = 1$ ならば，$S - \lambda$ は単射であり，$\mathsf{R}(S - \lambda)$ は稠密であることを示せ．

(v) (i), (iii), (iv) から，$\sigma_r(S) = \{\lambda \in \mathbb{C} | 0 \leq |\lambda| < 1\}$ を導け．

(vi) (iv) を用いて，$\sigma_c(S)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|=1\}$ を導け．

ヒント：$|\lambda|=1$ ならば，$S-\lambda$ は単射であるが，$\inf_{a\in l^2,a\neq 0}\|(S-\lambda)a\|/\|a\|=0$（i.e., $(S-\lambda)^{-1}$ は非有界）を示せ．

25. 前問の演算子 S の共役演算子 S^* について，次を証明せよ．

(i) 任意の $a\in l^2$ に対して，$(S^*a)_n=a_{n+1}, n\geq 1$ を示せ．

(ii) 任意の $\lambda\in\mathbb{C}$ に対して，$\mathsf{R}(S^*-\lambda)$ は稠密であることを示し，$\sigma_{\mathrm{r}}(S)=\emptyset$ を結論せよ．

(iii) $\sigma_{\mathrm{p}}(S^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}|0\leq|\lambda|<1\}$ を示せ．

(iv) $\sigma_{\mathrm{c}}(S^*)=\{\lambda\in\mathbb{C}|\,|\lambda|=1\}$ を示せ．

ヒント：$|\lambda|=1$ ならば，$S^*-\lambda$ は単射であるが，$\inf_{a\in l^2,a\neq 0}\|S^*-\lambda)a\|/\|a\|=0$ であること（i.e., $(S^*-\lambda)^{-1}$ は非有界）を示せ．

注意． (iii) からわかるように，S^* は，点スペクトルが連続体濃度をもつ演算子の一例である．

26 $\{\Psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ を H の CONS とする．l^2 の 0 でないベクトル $a=\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ を任意にとり，$b\in l^2$ を，$n\geq n_0+1$ ならば，$b_n=0$ となる任意のベクトルとする．a,b は $\|a\|^2+\|b\|^2=1$ をみたすとする．$\Phi_b:=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\Psi_n\in\mathsf{H}$ とおく．自然数 $N\geq n_0+1$ に対して，ベクトル $\Psi_N=\Phi_b+\sum_{n=N}^{\infty}a_{n-N+1}\Psi_n$ を定義する．

(i) $\|\Psi_N\|^2=\|b\|^2+\|a\|^2$，したがって，$\|\Psi_N\|=1$ であることを示せ．

(ii) H 上の演算子 P_N を $P_N\Psi=\langle\Psi_N,\Psi\rangle\Psi_N, \Psi\in\mathsf{H}$, によって定義すれば，これは射影演算子であることを示せ．

(iii) H 上の演算子 P を $P\Psi=\langle\Phi_b,\Psi\rangle\Phi_b, \Psi\in\mathsf{H}$, によって定義すれば，w-$\lim_{N\to\infty}P_N=P$ であることを示せ．

(iv) P は射影演算子ではないことを示せ．

(v) P_N は P に強収束はしないことを示せ．

27. 命題 2.82 を，スペクトル分解を用いずに，直接証明せよ．

付録A 測度と積分

量子力学の数理物理を厳密な方法のもとに十全に展開するには関数解析学に代表される現代解析学の知識が不可欠である．現代解析学においては，古典解析学におけるリーマン積分の一般化であるルベーグ積分に関する理論が基本的な道具のひとつである．また，現代的確率論の方法は量子力学においても有効な方法のひとつとして用いられるが，それは抽象的な測度論に基づく積分論を基礎として築かれる．こうした事情を考慮して，この付録では，本書を自己完結的に理解しうる範囲内で，読者の便宜のために，測度論および積分論を活用する観点から，基本的概念の定義や応用上重要な定理を採録する[*1]．

A.1 ボレル集合体と測度

測度という概念はユークリッド空間における通常の図形の体積（1次元ならば長さ，2次元ならば面積）の概念をもっと一般の集合にまで拡げたものである．といっても，どんな集合に対してもそのような概念が考えられるわけではない．測度が定義されるような集合の集まりとはどんなものであるべきかをつきつめていくと，一般概念としてのボレル集合体の概念に到達する：

定義 A.1 Xを空でない集合とし，BをXの部分集合からなるひとつの族とする．Bが次の四つの条件を満たすとき，Bを**ボレル集合体** (Borel field) という[*2]．

(i) $\emptyset \in \mathsf{B}$

(ii) $B \in \mathsf{B}$ ならば $B^c \in \mathsf{B}$ (B^c は B の補集合)

(iii) $B_1, B_2 \in \mathsf{B}$ ならば $B_1 \cap B_2 \in \mathsf{B}$

(iv) $B_n \in \mathsf{B}$ $(n = 1, 2, \cdots,)$, $B_m \cap B_n = \emptyset$ $(m \neq n)$ ならば $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathsf{B}$.

ボレル集合体の元を**ボレル集合** (Borel set) という．$\emptyset \in \mathsf{B}$ であるから，(ii) により $\mathsf{X} \in \mathsf{B}$ である．また，$B_n \in \mathsf{B}, n = 1, 2, 3, \cdots$, ならば $\cup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathsf{B}$ が上の定義から

[*1] この付録で述べる事実に関しては，多くの場合，その証明は省略する．証明に興味のある読者は，たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房，数学選書 4，初版 1963）を参照されたい．物理系の学生向きに書かれた，ルベーグ積分の分かりやすい教科書として，G. テンプル『ルベーグ積分』（江沢　洋・南條昌司訳，ダイヤモンド社，1981）をあげておこう．

[*2] **σ-代数**（加法族），**完全加法族**，**可算加法族**という言い方もする．

導かれる．

例 A.1 集合 X の部分集合の全体を B_{X} とすれば，これは明らかにボレル集合体である．また，X と空集合だけからなる集合族 $\{\mathsf{X}, \emptyset\}$ もボレル集合体である．

いまの例からもわかるように，集合 X のボレル集合体はひとつとは限らないことに注意しよう．

集合 X とその（ひとつの）ボレル集合体 B の対 (X, B) を**可測空間** (measurable space) とよぶ．以下に述べるように，この空間上に測度を定義するのでる．

X の部分集合からなる任意の集合族 $\mathsf{A}_0 \neq \emptyset$ があたえられたとき，これを含むボレル集合体の全体 $\mathbb{B} = \{\mathsf{B} : \text{ボレル集合体} \,|\mathsf{A}_0 \subset \mathsf{B}\}$ は空ではない．実際，$\mathsf{B}_{\mathsf{X}} \in \mathbb{B}$ である．そこで $\mathbb{B}$ に含まれるすべての B の共通部分を A とおけば，容易にわかるように，これはボレル集合体であり，しかも A_0 を含むボレル集合体のうちで最小のものである（すなわち，$\mathsf{A}_0 \subset \mathsf{B}$ となる任意のボレル集合体 B に対して $\mathsf{A} \subset \mathsf{B}$)．このボレル集合体 A を，A_0 **を含む最小のボレル集合体**あるいは A_0 **によって生成されるボレル集合体**という．

例 A.2 n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ における半開区間の全体 $\{(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n] \in \mathbb{R}^n \,|\, -\infty \leq a_j < b_j \leq \infty\}$ によって生成されるボレル集合体を $\boldsymbol{n}$ **次元ボレル集合体**とよび，記号的に B^n と書く．B^n の元を $\mathbb{R}^n$ のボレル集合という．

$\mathbb{R}^n$ の開集合全体によって生成されるボレル集合体を O_n, $\mathbb{R}^n$ の閉集合全体によって生成されるボレル集合体を C_n とすれば，

$$\mathsf{B}^n = \mathsf{O}_n = \mathsf{C}_n$$

が成り立つことが知られている．したがって，$\mathbb{R}^n$ の開集合も閉集合もボレル集合である．

定義 A.2 (i) 一般に，X のボレル集合体 B から $[0, \infty]$ への写像 μ があって

(a) $\mu(\emptyset) = 0$

(b) $B_n \in \mathsf{B}$ $(n = 1, 2, \cdots)$, $B_m \cap B_n = \emptyset$ $(m \neq n)$ ならば，$\mu(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n)$ （**完全加法性**）

がみたされるとき，μ を (X, B) 上の**測度** (measure) という．三つ組 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を**測度空間** (measure space) という．B を特に示す必要がない場合は，これを (X, μ) と書く．

(ii) $\mu(B) < \infty$ となる $B \in \mathsf{B}$ を $\boldsymbol{\mu}$ **測度有限な集合**とよぶ．X が μ 測度有限な集合の可算個の和集合になっている場合，すなわち，

$$\mathsf{X} = \cup_{n=1}^{\infty} \mathsf{X}_n, \quad \mathsf{X}_n \in \mathsf{B}, \quad \mu(\mathsf{X}_n) < \infty, \; n = 1, 2, \cdots,$$

をみたす $\mathsf{X}_n \in \mathsf{B}$ が存在するとき，μ を **$\boldsymbol{\sigma}$-有限な測度**とよび，測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ は **$\boldsymbol{\sigma}$-有限**であるという．

(iii) $\mu(\mathsf{X}) < \infty$ ならば，μ を (X, B) 上の**有界な測度**とよび，$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を**有界な測度空間**という．

上の定義からわかるように，有界な測度空間は σ-有限である．

本書では，簡単のため，測度空間といえば，$\boldsymbol{\sigma}$-有限な測度空間をさすものとする．

$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とすれば，$A \subset B$ をみたす任意の $A, B \in \mathsf{B}$ に対して $\mu(A) \leq \mu(B)$ が成り立つ（$B = (B \backslash A) \cup A$ と考えて，定義 A.2(ii) を使え）．これを測度の**単調性**という．

例 A.3　$\mathbb{R}^n$ における，互いに共通部分をもたない，有限個の半開区間の和集合の全体を $\mathfrak{I}_n$ としよう．写像 $\mu_L^n : \mathfrak{I}_n \to [0, \infty]$ を次のように定義する．まず，

$$\mu_L^n((a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]) = \prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$$

とし（これは "図形"$(a_1, b_1] \times \cdots \times (a_n, b_n]$ の通常の意味での "体積"をあたえる），互いに共通部分をもたない半開区間 $E_j, j = 1, \cdots, m$ の和集合に対しては

$$\mu_L^n(\cup_{j=1}^m E_j) := \sum_{j=1}^m \mu(E_j)$$

とする．これをもとにして，$B \in \mathsf{B}^n$ に対しては

$$\mu_L^n(B) = \inf \left\{ \sum_{k=1}^\infty \mu_L^n(E_k) \middle| B \subset \cup_{k=1}^\infty E_k, E_k \in \mathfrak{I}_n \right\}$$

によって，$\mu_L^n(B)$ を定義する（右辺は，B を $\mathfrak{I}_n$ の元の和集合で覆うすべての仕方に関する下限）．こうして定義される，B^n から $[0, \infty]$ への写像 μ_L^n は測度になることが示される．この測度を n 次元の**ルベーグ (Lebesgue) 測度**とよぶ．

測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ において，$\mu(B) = 0$ となる集合 $B \in \mathsf{B}$ を測度 μ に関する**零集合** (null set) とよぶ．

たとえば，$\mathbb{R}$ における離散的集合 $\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ はルベーグ測度に関して零集合である．実際，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$B_{j,\varepsilon} = (a_j - \varepsilon, a_j + \varepsilon]$ とすれば

$$\mu_L^1(\{a_1, \cdots, a_n\}) = \sum_{j=1}^n \mu_L^1(\{a_j\}) \leq \sum_{j=1}^n \mu_L^1(B_{j-\varepsilon}) = 2n\varepsilon$$

であるから，$\varepsilon \downarrow 0$ として，$\mu_L^1(\{a_1, \cdots, a_n\}) = 0$. 同様に，$\mathbb{R}^n$ において可算無限個の点からなる集合はルベーグ測度に関して零集合である．なお，連続体の濃度をもつ零集合も存在することを注意しておこう[*3].

$(\mathbb{R}^n, \mathsf{B}^n)$ 上の測度 μ に対して，$\mu(B) = 0$ となる最大の開集合 B の補集合 B^c を測度 μ の**台** (support) とよび，$\mathrm{supp}\,\mu$ という記号で表わす．

例 A.4 n 次元ルベーグ測度 μ_L^n の場合は，空でないどんな開集合 B に対しても，$\mu_L^n(B) > 0$ であるので，$\mathrm{supp}\,\mu_L^n = \mathbb{R}^n$ となる[*4].

例 A.5 $[a,b] \subset \mathbb{R}$ $(-\infty < a < b < \infty)$ とし，μ_L を 1 次元ルベーグ測度としよう．任意の $B \in \mathsf{B}^1$ に対して，$\nu(B) \geq 0$ を

$$\nu(B) = \mu_L([a,b] \cap B)$$

によって定義すれば，ν は $\mathbb{R}$ 上の測度である．しかも，$\nu(\mathbb{R}) = \mu_L([a,b]) = b - a$ であるから，ν は $\mathbb{R}$ 上の有界な測度である．$\mathrm{supp}\,\nu = [a,b]$ であることも容易にわかる．

例 A.6 $\{a_n\}_{n=1}^N \subset \mathbb{R},\ \lambda_n > 0,\ n = 1, \cdots, N,$ とし，$B \in \mathsf{B}^1$ に対して

$$\nu(B) = \begin{cases} \sum_{a_n \in B}^N \lambda_n & ;\ \{a_n\}_{n=1}^N \cap B \neq \emptyset \text{ のとき} \\ 0 & ;\ \{a_n\}_{n=1}^N \cap B = \emptyset \text{ のとき} \end{cases}$$

を定義する．ただし，$\sum_{a_n \in B}^N$ は a_n が B にはいるような n についての和を表わす．このとき，ν は $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の測度である．容易にわかるように，$\mathrm{supp}\,\nu = \{a_n\}_{n=1}^N$. この型の測度を，点 $a_1, \cdots, a_n$ に質量をもつ**デルタ測度** (delta measure) とよび，記号的に，

$$d\nu(x) = \sum_{n=1}^N \lambda_n \delta(x - a_n) dx$$

と表わす．

A.2 可測関数と積分

関数の積分という概念は抽象的な形では，ある関数のクラスから複素数全体への線形な写像，すなわち，線形汎関数としてとらえることができる．古典解析学における

---

*3 たとえば，**カントール集合**とよばれる集合はそのような集合である．伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房，数学選書 4，初版 1963）の §7 を参照．

*4 開集合は開球を含み，開球のルベーグ測度は 0 でないことに注意（$\mathbb{R}^n$ の開球は必ず，$\underbrace{(a,b] \times \cdots \times (a,b]}_{n}(a < b)$ という形の集合を含む）．

リーマン積分は，たとえば，閉区間 $[a,b]$ 上の複素数値連続関数全体の上の線形汎関数である．これから述べるルベーグ積分は，可測空間 (X,B) 上に測度があたえられたとき，X 上のあるクラスの関数に対して定義される線形汎関数である．ルベーグ積分は，関数の積分という概念を非常に深いレヴェルにおいてとらえたものである．

$(\mathsf{X},\mathsf{B},\mu)$ を測度空間，f を X 上の関数で実数値または $\pm\infty$ をとるものとする．任意の実数 a に対して，$\{x \in X | a < f(x)\} \in \mathsf{B}$ となるとき，f を B-**可測関数** (measurable function) または**ボレル可測関数**という．B を書かなくても誤解の余地がなければ，単に可測関数という．f が複素数値関数のときは，その実部および虚部が可測関数ならば，f は可測であるという．

例 A.7　$\mathbb{R}^n$ 上の連続関数は B^n-可測である．なぜなら，f を $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数とすれば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$\{x \in \mathbb{R}^n | a < f(x)\}$ は開集合であり，開集合はボレル集合だからである．

空でない集合 X の部分集合 B に対して，

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in B \text{ のとき} \\ 0 & ; x \notin B \text{ のとき} \end{cases} \tag{A.1}$$

によって定義される関数 χ_B を集合 B の**定義関数** (characteristic function) あるいは**特性関数**という．$B \in \mathsf{B}$ ならば，χ_B は可測である．$B_j \in \mathsf{B}, j = 1, \cdots, n, B_j \cap B_k = \emptyset$ $(j \neq k)$ があって，

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{B_j} \quad (\alpha_j \text{は複素数}) \tag{A.2}$$

という形に表わされる関数 f を**単純関数** (simple function) あるいは**階段関数** (step function) という．

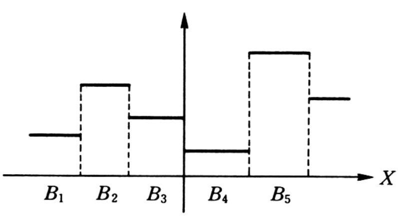


図 A.1　階段関数

このような関数 f に対して，測度 μ に関する積分 $\int_{\mathsf{X}} f d\mu$ を

$$\int_{\mathsf{X}} f d\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(B_j)$$

によって定義する（右辺の量は f を (A.2) のように表わす仕方に依存しないことが示される）.

次に f が可測で $f \geq 0$ の場合は，各点 $x \in \mathsf{X}$ で $f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ となる単純関数の非減少列 $\{f_n\}_n$ がとれる．たとえば，

$$\begin{aligned} B_{n,k} &= \left\{ x \in X \,\middle|\, \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\},\ k = 1, \cdots, 2^n n \\ B_n &= \{x \in X | f(x) \geq n\}, \end{aligned}$$

とし，

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^{2^n n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{B_{n,k}}(x) + n\chi_{B_n}(x)$$

とすればよい．これは，リーマン積分を定義するときとは違って，関数 f を “水平に切って”，有限和で近似するという発想である．図 A.2 参照.

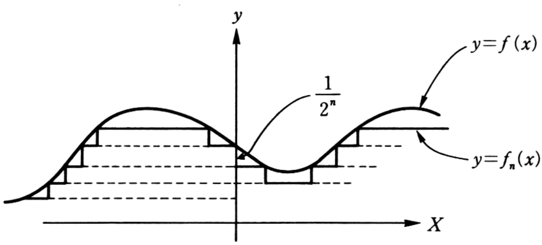


図 A.2　関数 f_n

この事実をもとにして，f の μ に関する積分を

$$\int_{\mathsf{X}} f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n d\mu \tag{A.3}$$

によって定義する．右辺は単調非減少であるから，確かにその極限は $+\infty$ も含めて存在する．右辺の極限が，f を近似する，単調非減少な階段関数列の選び方によらないことも示される．この値が有限のとき f は μ に関して**積分可能** (integrable)，あるいは**可積分**であるという.

可測関数 f が実数値の場合は，

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f_-(x) = \max\{-f(x), 0\}, \tag{A.4}$$

とすれば，$f_\pm \geq 0$ であって，

$$f = f_+ - f_- \tag{A.5}$$

と書けることを利用する．f_+, f_- を，それぞれ，f の**非負部分**，**非正部分**という．$f_\pm$ に対しては，前段の結果より，$\int_{\mathsf{X}} f_+ d\mu$, $\int_{\mathsf{X}} f_- d\mu$ が定義されるので，このうちの少なくとも一方が有限のとき，f の μ に関する積分を

$$\int_{\mathsf{X}} f d\mu := \int_{\mathsf{X}} f_+ d\mu - \int_{\mathsf{X}} f_- d\mu \tag{A.6}$$

によって定義する．積分 $\int_{\mathsf{X}} f_+ d\mu$, $\int_{\mathsf{X}} f_- d\mu$ の両方とも有限のとき，f は μ に関して**積分可能**あるいは**可積分**であるという．この積分の定義にしたがえば，f が可積分であることと $|f|$ が可積分であることは同値である（広義リーマン積分の場合との違いに注意）．

可測関数 f が複素数値のときは，$f = f_1 + if_2$（ f_1, f_2 はそれぞれ，f の実部と虚部）と表わされるので，f_1, f_2 が可積分のときに限り，f の μ に関する積分を

$$\int_{\mathsf{X}} f d\mu = \int_{\mathsf{X}} f_1 d\mu + i \int_{X} f_2 d\mu \tag{A.7}$$

によって定義する．X の部分可測集合 $E \in \mathsf{B}$ の上の積分は

$$\int_E f d\mu = \int_{\mathsf{X}} \chi_E f d\mu \tag{A.8}$$

によって定義する．

積分の定義から，任意の $E \in \mathsf{B}$ と零集合 $N \in \mathsf{B}$ に対して，

$$\int_N f d\mu \ = \ 0, \tag{A.9}$$

$$\int_{E \cup N} f d\mu \ = \ \int_E f d\mu \tag{A.10}$$

が成り立つことは容易にわかる．(A.10) 式は，積分範囲に零集合を加えても積分の値は変化しないことを示す．

積分変数を明示したいときは，$\int_E f d\mu = \int_E f(x) d\mu(x)$ のように書く．また，X 全体での積分は単に $\int f d\mu$ と書くこともある．こうして，測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ 上の可測関数に対して積分が定義される．この方式によって定義される積分を**ルベーグ式積分** (Lebesgue integral) あるいは単に**ルベーグ積分**という．

$\mathsf{X} = \mathbb{R}^n$ で μ がルベーグ測度 μ_L^n の場合の積分を $\boldsymbol{n}$ **次元ルベーグ積分**とよぶ．ボレル集合 $E \in \mathsf{B}^n$ の上の n 次元ルベーグ積分 $\int_E f d\mu_L^n$ は，しばしば，より簡潔に，

$$\int_E f(x) dx$$

と書かれる．

$\mathbb{R}^n$ の可算個の点からなる集合のルベーグ測度は 0 であるから，(A.10) によって，たとえば，任意の $a, b \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\int_{(a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = \int_{[a,b)} f(x)dx$$

が成り立つ．

ルベーグ積分の一般的性質を述べる前に言葉をひとつ定義する．$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とし，各点 $x \in \mathsf{X}$ ごとに定まる命題 $P(x)$ があるとする．ある零集合 N（すなわち，$\mu(N) = 0$ なる可測集合 N）が存在し，任意の $x \in \mathsf{X} \setminus N$ に対して命題 $P(x)$ が成立するとき，命題 $P(x)$ は，測度 μ に関して**ほとんどいたるところ** (almost everywhere) **成立する**といい，$P(x)\quad \mu$-a.e. あるいは $P(x)\quad \mu$-a.e.x などと記す．どの測度で考えているかが文脈から明らかな場合は，μ-a.e. を単に a.e. と記す．しかし,「$P(x)\quad \mu$-a.e.」であっても，別の測度 ν に関しては,「$P(x)\quad \nu$-a.e.」とは限らないから，どの測度で考えているかは常に注意を要する．

例 A.8　二つの可測関数 f, g がある零集合 N に属する点以外のすべての点で等しいとき，すなわち，$\mu(N) = 0$ で，$f(x) = g(x), \quad x \in \mathsf{X} \setminus N$, が成立するならば，$f$ と g は測度 μ に関してほとんどいたるところ等しいといい，$f(x) = g(x)$, μ-a.e.x, または（測度 μ に関わっていることは了解されているとして）単に $f(x) = g(x)$, a.e.x と記す．この場合の零集合 N は，もちろん，f, g に依存しながら決まっている．

たとえば，$\mathbb{R}$ 上の関数

$$f_{\mathrm{D}}(x) = \begin{cases} 1 & ; x \text{ が有理数のとき} \\ 0 & ; x \text{ が無理数のとき} \end{cases}$$

—**ディリクレ** (P. G. Dirichlet) **関数**とよばれる[*5]—はボレル可測であるが，有理数全体は可算無限個の集合であり，可算無限個の集合のルベーグ測度は 0 であるから，1 次元ルベーグ測度に関して $f_{\mathrm{D}}(x) = 0$, a.e.x である．

例 A.9　f, g が X 上の実数値関数で，ある零集合 N が存在して，

$$g(x) < f(x), \quad x \in \mathsf{X} \setminus N,$$

が成り立つならば，$f(g)$ は，測度 μ に関してほとんどいたるところ $g(f)$ よりも大きい（小さい）といい，$g(x) < f(x), \quad \mu$-a.e.x, と記す．

例 A.10　ある零集合 N が存在して $|f(x)| < \infty, \quad x \in \mathsf{X} \setminus N$, ならば，$f$ は μ に関してほとんどいたるところ有限であるといい，$|f(x)| < \infty, \quad \mu$-a.e.$x$, と記す．

---

*5 $f_{\mathrm{D}}(x) = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{k\to\infty} (\cos n!\pi x)^{2k} \right)$.

例 A.11　ある定数 $C > 0$ と零集合 N があって，$|f(x)| \le C, \quad x \in \mathsf{X} \setminus N$, ならば，$f$ は測度 μ に関して**本質的に有界** (essentially bounded) であるといい，$|f(x)| \le C, \quad \mu$-a.e.x, と記す．この場合，

$$\|f\|_\infty := \text{ess.sup}|f(x)| := \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)| \tag{A.11}$$

を f の**本質的上限** (essential supremum) とよぶ．

注意　f が μ に関して本質的に有界ならば，それは μ に関してほとんどいたるところ有限であるが，この逆は必ずしも成り立たない．たとえば，$\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x) = 1/|x|$ はボレル可測であり，$N = \{0\}$ 以外の点では有限である ($f(0) = +\infty$)．一方，この N のルベーグ測度は 0 である．したがって，$1/|x|$ はルベーグ測度に関してほとんどいたるところ有限である．しかし，これは，ルベーグ測度に関しては本質的に有界な関数ではない．

測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ におけるルベーグ積分の基本的な性質は次の定理にまとめられる．

定理 A.3　(i) $g(x) \le f(x)$, a.e.x で f, g が可積分ならば，$\int_{\mathsf{X}} g d\mu \le \int_{\mathsf{X}} f d\mu$.

(ii) f, g が可積分ならば，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して $\alpha f + \beta g$ は可積分であり

$$\int_{\mathsf{X}} (\alpha f + \beta g) d\mu = \alpha \int_{\mathsf{X}} f d\mu + \beta \int_{\mathsf{X}} g d\mu.$$

(iii) f が可積分ならば，f はほとんどいたるところ有限であり，$\left|\int_{\mathsf{X}} f d\mu\right| \le \int_{\mathsf{X}} |f| d\mu$.

(iv) $f(x) = g(x)$, a.e.x で，f が可積分ならば g もそうであって，$\int_{\mathsf{X}} f d\mu = \int_{\mathsf{X}} g d\mu$.

上の (i) の応用として，$f \ge 0$ a.e.x のとき，$E, F \in \mathsf{B}, E \subset F$ ならば，

$$0 \le \int_E f d\mu \le \int_F f d\mu \tag{A.12}$$

が成り立つ（$\chi_E(x) f(x) \le \chi_F(x) f(x)$, a.e.$x \in \mathsf{X}$ による）．

注意　定理 A.3(iv) は次のことを意味する：可積分関数については，零集合上の値は積分値に影響をあたえない．つまり，零集合上での関数値が何であるかは全然重要ではない．したがって，積分を考える可測関数は，X のすべての点で定義されていると考える必要はなく，ほとんどいたるところの点で定義されているとして十分である．この見方はたいへん便利である．たとえば，関数 $1/x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は，$\mathbb{R}$ 上の関数とみなすには，$x = 0$ の値を決めてやらねばならないが，集合 $\{0\}$ はルベーグ測度 μ_L^1 について零集合であるから，μ_L^1 に関する限り，$1/x$ はほとんどいたるところ定義された関数と見なされ，$x = 0$ での値を問題にすることなく，μ_L^1 についての積分を考察できる．

ルベーグ積分とリーマン積分との関係は次の定理であたえられる．

定理 A.4 (i) $\mathbb{R}^n$ の中の有界集合 $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ で $f(x)$ が連続ならば，E 上での f のルベーグ積分は E 上での f のリーマン積分に等しい．

(ii) $\mathbb{R}^n$ の中の開集合 F（無限区間でもよい）で $f(x)$ は連続で非負，かつ広義リーマン積分可能ならば，f は F でルベーグ積分可能であり，この二つの積分の値は等しい．

注意 (1) (ii) において，f が非負でない場合は，f が広義リーマン積分可能でもルベーグ積分可能であるとは限らない．たとえば，関数 $f(x) = \sin x/x$ に対して，半無限区間 $(0, \infty)$ における広義リーマン積分は存在するが，ルベーグ積分は存在しない．

(2) 例 A.8 のディリクレ関数 f_{D} は任意の有界閉区間 $[a, b]$ の上でリーマン積分可能ではない[*6]．だが，それはルベーグ積分可能であり，$\int_{[a,b]} f_{\mathrm{D}}(x)dx = 0$ となる．

A.3 極限定理

この節では，測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ 上の関数の積分に関して，応用上重要な極限定理を述べる．

定理 A.5 単調収束定理 (monotone convergence theorem)．$f_n \geq 0$ は可積分関数で，a.e.$x \in X$ に対して $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots$ が成り立つとする（したがって，$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, a.e.$x$, が ∞ の値も許して存在する）．このとき，f が可積分であるための必要十分条件は $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n d\mu$ が有限となることである．この場合，

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} f_n d\mu = \int_{\mathsf{X}} f d\mu$$

が成り立つ．

定理 A.6 ルベーグの優収束定理 (Lebesgue dominated convergence theorem). $f_n, n = 1, 2, \cdots$, は可積分関数，

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad \text{a.e.}x,$$

とする．さらに，

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{a.e.}x, n = 1, 2, \cdots ,$$

---

*6 たとえば，小松勇作『解析概論 [I]』（廣川書店，初版 1962）の §42 を参照．

をみたす可積分関数 g が存在するとしよう．このとき，f は可積分であって

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathsf{X}} f_n d\mu = \int_{\mathsf{X}} f d\mu.$$

この定理は積分と極限の順序交換が可能であるための十分条件をあたえるものであり，応用上，極めて強力な道具になる．リーマン積分の場合の対応する定理よりもずっと使いやすい形になっている．

定理 A.7　ファトゥー (P. Fatou) の**補題．** $\underline{\lim}_{n\to\infty}\int_X f_n d\mu < \infty$ をみたす非負の可積分関数列 $\{f_n\}_n$ $(f_n \geq 0)$ に対して，

$$\int_{\mathsf{X}} \underline{\lim}_{n\to\infty} f_n(x) d\mu \leq \underline{\lim}_{n\to\infty}\int_{\mathsf{X}} f_n d\mu.$$

が成り立つ．

この定理は，極限関数が可積分であることを示す場合に有用である．

A.4　積分と微分の順序交換

応用上，被積分関数 f がパラメーターを含んでいる場合が現われる．たとえば，f が実数パラメーター t を含む場合を考えてみよう．この場合，そのような被積分関数の積分 $F=\int_{\mathsf{X}} f d\mu$ は t の関数となる．問題は，どのような条件があれば，F をパラメーター t で微分したもの dF/dt と f を t で偏微分した関数を積分したもの $\int_{\mathsf{X}} \partial f/\partial t d\mu$ が等しくなるかである．ひとつの十分条件が次の定理であたえられる．

定理 A.8　$(\mathsf{X},\mathsf{B},\mu)$ を測度空間とする．$f(x,t)$ を $\mathsf{X}\times(a,b)$ 上の関数とし，$f(x,t)$ は，t を固定するとき，x の関数としては可積分，また，a.e.x に対して，t の関数として微分可能であるとする．さらに，積分可能な関数 $g(x)$ が存在して

$$\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right| \leq g(x), \quad \text{a.e.}x, \quad t\in(a,b),$$

がみたされているとする．このとき，積分 $\int_{\mathsf{X}} f(x,t)d\mu$ は t の関数として微分可能であり

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathsf{X}} f(x,t)d\mu = \int_{\mathsf{X}} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} d\mu$$

が成り立つ．

A.5 フビニの定理

二つの測度空間 $(\mathsf{X}, \mathsf{B}_\mathsf{X}, \mu)$, $(\mathsf{Y}, \mathsf{B}_\mathsf{Y}, \nu)$ があたえられたとき，B_X の元と B_Y の元からつくられる矩形集合の全体

$$\{A \times B \subset X \times Y | A \in \mathsf{B}_\mathsf{X}, B \in \mathsf{B}_\mathsf{Y}\}$$

を含む最小のボレル集合体を $\mathsf{B}_\mathsf{X} \otimes \mathsf{B}_\mathsf{Y}$ で表わす．次の定理は，μ, ν から，可測空間 $(\mathsf{X} \times \mathsf{Y}, \mathsf{B}_\mathsf{X} \otimes \mathsf{B}_\mathsf{Y})$ 上に "自然な" 測度が定義されることを示すものである．

定理 A.9 $(\mathsf{X} \times \mathsf{Y}, \mathsf{B}_\mathsf{X} \otimes \mathsf{B}_\mathsf{Y})$ 上の測度 $\mu \otimes \nu$ で

$$(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B), \quad A \in \mathsf{B}_\mathsf{X}, B \in \mathsf{B}_\mathsf{Y},$$

をみたすものがただひとつ存在する．この測度を μ と ν の**直積測度** (product measure) とよぶ．

関数 $f : \mathsf{X} \times \mathsf{Y} \to \mathsf{R}$ が $\mathsf{B}_\mathsf{X} \otimes \mathsf{B}_\mathsf{Y}$-可測ならば，直積測度 $\mu \otimes \nu$ による積分 $\int_{\mathsf{X} \times \mathsf{Y}} f d(\mu \otimes \nu)$ が考えられる．これが，たとえば

$$\int_\mathsf{X} \left(\int_\mathsf{Y} f(x, y) d\nu(y) \right) d\mu(x)$$

という累次積分に等しいことがわかれば都合がよい．これに対する十分条件をあたえるのが次のフビニ (G. Fubini) の定理であって，理論上も応用上も非常に重要な役割を演じる．

まず，次の事実を注意しておく．f を上のようなものとすれば，任意の $x \in \mathsf{X}$ に対して，関数 $y \to f(x, y)$ は B_Y-可測である．もし，すべての $x \in \mathsf{X}$ に対して，関数 $f(x, \cdot)$ が ν 関して可積分ならば，$x \to \int_\mathsf{Y} f(x, y) d\nu(y)$ は B_X-可測である．

定理 A.10 フビニの定理． f を $\mathsf{B}_\mathsf{X} \otimes \mathsf{B}_\mathsf{Y}$-可測関数とする．このとき，$f$ が測度 $\mu \otimes \nu$ に関して可積分であるための必要十分条件は，

$$\int_\mathsf{X} \left(\int_\mathsf{Y} |f(x, y)| d\nu(y) \right) d\mu(x) < \infty \tag{A.13}$$

が成立することである．この場合，

$$\int_\mathsf{Y} \left(\int_\mathsf{X} |f(x, y)| d\mu(x) \right) d\nu(y) < \infty \tag{A.14}$$

であって，

$$\int_{\mathsf{X}\times\mathsf{Y}} f(x,y)d(\mu\otimes\nu)(x,y) = \int_{\mathsf{X}}\left(\int_{\mathsf{Y}} f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)$$
$$= \int_{\mathsf{Y}}\left(\int_{\mathsf{X}} f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$

が成り立つ．

注意　上の定理で，(A.13) は，μ と ν の役割を交換したもので置き換えることができる．この場合，(A.14) も μ と ν の役割を交換したものになる．

A.6　特異性と絶対連続性

可測空間 (X,B) に二つの測度 μ,ν があたえられた場合，これらを比較する概念が存在する．

$\mu(B)=0,\ \nu(\mathsf{X}\setminus B)=0$ をみたす集合 $B\in\mathsf{B}$ が存在するとき，ν は μ について**特異** (singular) であるという．

例 A.12　ν を例 A.6 のものとする．このとき，$\nu(\mathbb{R}\setminus\{a_n\}_{n=1}^N)=0$. 一方，$\mu_L^1$ を 1 次元ルベーグ測度とすれば，$\mu_L^1(\{a_n\}_{n=1}^N)=0$. ゆえに，$\nu$ は μ_L^1 について特異である．すなわち，デルタ測度はルベーグ測度について特異である．

可測集合 $B\in\mathsf{B}$ について，$\mu(B)=0$ ならば $\nu(B)=0$ が成り立つとき，ν は μ に関して**絶対連続** (absolutely continuous) であるという．この絶対連続性という概念は次の定理によって特徴づけられる．

定理 A.11　ラドン (J. Radon)-ニコディム (O. M. Nikodým) **の定理**．ν が μ に関して絶対連続であるための必要十分条件は，非負の可測関数 f が存在して，すべての $B\in\mathsf{B}$ に対して，$\nu(B)=\int_B f(x)d\mu(x)$ が成立することである．f は零集合上の値を除いて一意的にきまる．

この定理にいう関数 f は，ν の μ に関する**ラドン-ニコディム導関数**とよばれる．

次に述べる測度の分解定理も重要である．

定理 A.12　**ルベーグの分解定理**．μ,ν を (X,B) 上の任意の σ-有限な測度とする．このとき，μ について絶対連続な測度 ν_{ac} と特異な測度 ν_{sing} があって，$\nu=\nu_{\mathrm{ac}}+\nu_{\mathrm{sing}}$ と分解される．この分解は一意的である．

絶対連続性に関連して，積分変数の変換公式を述べておこう．(X,B) を可測空間とする．各 $B\in\mathsf{B}$ に対して，複素数値 $\Phi(B)$（∞ は含まれない）が対応し，$B=\cup_{n=1}^{\infty}B_n, B_n\cap B_m=\emptyset(n\neq m)$ ならば，$\Phi(B)=\sum_{n=1}^{\infty}\Phi(B_n)$（完全加法性）が成り立つとき，$\Phi$ を (X,B) 上の**加法的集合関数** (completely additive set function) という．たとえば，(X,B) の有界な測度は (X,B) 上の加法的集合関数である．加法的集合関数は，有界な測度の概念の一般化とみることができる．

f を測度空間 $(\mathsf{X},\mathsf{B},\mu)$ 上の可積分関数とすれば

$$\Phi_f(B)=\int_B f(x)d\mu(x),\quad B\in\mathsf{B}, \tag{A.15}$$

によって定義される Φ は (X,B) 上の加法的集合関数ある．この加法的集合関数に関する積分が次のように定義される．まず，

$$\begin{aligned} f &= g+ih,\quad g=\mathrm{Re}\,f,\ h=\mathrm{Im}\,f,\\ g &= g_+-g_-,\quad h=h_+-h_-, \end{aligned}$$

と書けることに注意すれば (g_+,g_- は g の非負部分，非正部分；$h_\pm$ についても同様)，

$$\Phi_f(B)=\Phi_{g_+}(B)-\Phi_{g_-}(B)+i(\Phi_{h_+}(B)-\Phi_{h_-}(B)) \tag{A.16}$$

と書き直せる．一方，$f\geq 0$ ならば，Φ_f は測度であり，しかも，μ について絶対連続である．したがって，任意の B-可測関数 F に対して，積分 $\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_f(x)$ が定義される．そこで，一般の f に対しては，(A.16) に基づいて，

$$\begin{aligned} \int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_f(x) &= \int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_{g_+}(x)-\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_{g_-}(x)\\ &\quad +i\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_{h_+}(x)-i\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_{h_-}(x) \end{aligned} \tag{A.17}$$

によって，積分 $\int_{\mathsf{X}}F(x)d\Phi_f(x)$ を定義する．この場合，(A.17) の右辺のそれぞれの積分が有限のとき，F は Φ_f に関して**可積分**であるという．

定理 A.13　積分変数の変換．$(\mathsf{X},\mathsf{B},\mu)$ を測度空間とする．f,g を可測関数とし，f, fg は可積分であるとする．このとき，g は Φ_f に関して可積分であり，

$$\int_{\mathsf{X}}g(x)d\Phi_f(x)=\int_{\mathsf{X}}g(x)f(x)d\mu(x)$$

が成り立つ．

A.7　累乗可積分関数の空間

$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とし，f を B-可測関数とする．ある正数 p があって関数 $|f(x)|^p$ が μ について可積分であるとき，すなわち，$\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^p d\mu(x) < \infty$ が成り立つとき，f は μ について **p 乗可積分**であるという．p 乗可積分な関数の全体を $\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ で表わす．X 上の本質的に有界な関数の全体を $\mathcal{L}^\infty(\mathsf{X}, d\mu)$ で表わす．

$1 \leq p < \infty$ ならば，任意の $f, g \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して不等式

$$\left(\int_{\mathsf{X}} |f(x) + g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} + \left(\int_{\mathsf{X}} |g(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{A.18}$$

が成り立つ．これを**ミンコフスキー**（Minkowski）**の不等式**という[*7]．任意の複素数 α に対して，$\alpha f \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ であることは明らかである．これらの事実は，$\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ が複素ベクトル空間になっていることを意味する．

任意の $f \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，$\|f\|_p$ を

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathsf{X}} |f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) \tag{A.19}$$

によって定義する．$p = \infty$ のとき，すなわち，$\|f\|_\infty$ は (A.11) によって定義される．このとき，(A.18) と $\|\cdot\|_\infty$ の性質により，

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad f, g \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu), \tag{A.20}$$

が成立する．これは**3 角不等式**とよばれる．容易にわかるように，任意の複素数 α に対して，$\|\alpha f\|_p = |\alpha| \|f\|_p$．さらに，

$$\|f\|_p = 0 \Longrightarrow f(x) = 0, \quad \mu\text{-a.e.}x, \tag{A.21}$$

が成立する．

本文の第 1 章 1.2.6 項において，ノルム空間の概念が導入されている．対応 $f \to \|f\|_p$ に関して，上に示した性質は，$\|\cdot\|_p$ が，1.2.6 項の (N.1) を除く，ノルムの性質をすべてもっていることを示す [(A.21) だけからは，$f = 0$ と結論できないことに注意]．$\mathcal{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ をノルム空間とみなすには，(A.21) に注目して，この空間に，次の

[*7] 証明については，たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房，数学選書 4，12 版，1974）の §22，pp.165–166 を参照．

相等の関係を定義する．すなわち，$f,g \in \mathcal{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ が $f(x)=g(x)$, μ-a.e.x をみたすならば，f と g は同じものとみなし，$f=g$ と書く．**この同一視を付与して考えた $\mathcal{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ を $\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ と記す**．定理 A.3(iv) によって，$f(x)=g(x)$, μ-a.e.x ならば，$\|f\|_p=\|g\|_p$ であるから，いま述べた相等の関係はノルムの相等と整合的である．また，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ においては，ノルムの正定値性，すなわち，$f\in \mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ について，$\|f\|_p=0 \Longrightarrow f=0$ も保証される．したがって，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ は，$\|\cdot\|_p$ をノルムとするノルム空間になる．$f\in \mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ に対して，$\|f\|_p$ を f の **L^p ノルム**という．なお，どの測度空間に関する L^p ノルムであるかを明確にするときは，$\|f\|_p$ を $\|f\|_{\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)}$ と書く．

注意 いま述べた同一視についてもっと厳密に述べるならば次のようになる．空間 $\mathcal{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ には，$f(x)=g(x)$, μ-a.e.$x \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} f\sim g$ によって，同値関係 $\sim$ が定義される．したがって，この同値関係によって，$\mathcal{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ の元を類別できる．この類別を行なうことが，上述の相等の関係を導入することに他ならない．こうして得られる同値類の全体を $\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ で表わすのである．元 $f\in\mathcal{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ が属する同値類を $[f]$ と書き，そのノルムを

$$\|[f]\|_p=\left(\int_{\mathsf{X}}|f(x)|^p d\mu(x)\right)^{1/p}$$

によって定義する．定理 A.3(iv) のおかげで，右辺は，同値類 $[f]$ の代表元 f の選び方に依存しないのでこの定義は意味をもつ．記法の慣用上，関数 $f\in\mathcal{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ の同値類 $[f]\in\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ も同じ記号 f で表わす．だが，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ の元は**同値類であって，もはや関数ではない**，という事実は常に心に留めて置くべきである．

ノルム空間 $\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ に対して，$f\in\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ があって，$\|f_n-f\|_p\to 0\ (n\to\infty)$ が成り立つとき,「$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に **L^p 収束**する」あるいは「$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は f に**平均 p 乗収束する**」という．

特に，$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が f に平均 2 乗収束する場合，すなわち，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\mathsf{X}}|f_n(x)-f(x)|^2 d\mu(x)=0$$

が成立するとき，このことを記号的に

$$f=\mathrm{l.i.m.}_{n\to\infty}f_n \tag{A.22}$$

と表わす（「l.i.m.」は “limit in mean”の略）．

ノルム空間 $\mathsf{L}^p(\mathsf{X},d\mu)$ がいつ無限次元になるかについては次の命題がある：

命題 A.14　$X_n \in \mathsf{B}, 0 < \mu(X_n) < \infty, X_n \cap X_m = \emptyset, n \neq m$, をみたす可算無限個の $X_n, n = 1, 2, \cdots$, が存在すれば，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ は無限次元である.

証明　いまの場合，$f_n = \chi_{X_n}$（X_n の定義関数）とおけば，$\int_{\mathsf{X}} |f_n(x)|^p d\mu(x) = \mu(X_n) < \infty$ であるから，$f_n \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ であり，任意の N に対して，$f_1, \cdots, f_N$ は一次独立であることがわかる. □

注意　X が有限個の点からなる場合には，X 上の関数の全体がつくるベクトル空間は有限次元であるので，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ も有限次元である.

ノルム空間 $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は，

$$\|f_n - f_m\|_p \to 0(n, m \to \infty)$$

をみたすとき，**基本列**あるいは**コーシー列**とよばれる. これは，厳密に述べれば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 が存在して，$n, m \geq n_0$ ならば，$\|f_n - f_m\|_p < \varepsilon$ が成り立つような点列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ のことである. このような点列の収束性に関する次の定理は重要である.

定理 A.15　$1 \leq p \leq \infty$ とする. このとき，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の任意のコーシー列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対して，ある $f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ が存在して，$\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つ.

この定理に述べられた，ノルム空間 $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の性質は，**完備性** (completeness) とよばれ，極めて重要な性質である. 第 1 章 1.2.6 項で定義される用語を使うならば，$\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ はバナッハ空間なのである.

定理 A.15 の重要性に鑑みて，その証明をここであたえておこう.

定理 A.15 の証明

$1 \leq p < \infty$ の場合に対してのみ証明する（$p = \infty$ の場合も同様）. 証明を通じて，$\|f\|_p = \|f\|(f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu))$ とおく. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ を $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の任意のコーシー列とする. したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 $n_0 = n_0(\varepsilon)$ が存在して，$n, m \geq n_0$ ならば $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$. このとき，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の適当な部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ に対して，

$$\lim_{k \to \infty} \|f_{n(k)} - f\| = 0 \tag{A.23}$$

をみたす $f \in L^p(X, d\mu)$ の存在を示せば十分である. なぜなら，その場合，3 角不等式を用いて，

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|f_n - f\| \leq \overline{\lim_{n,k \to \infty}} \|f_n - f_{n(k)}\| + \overline{\lim_{k \to \infty}} \|f_{n(k)} - f\| = 0,$$

したがって，$\lim_{n\to\infty}\|f_n - f\| = 0$ となるからである．

上のような部分列 $\{f_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ が実際に存在することを示そう．$\varepsilon = 1/2$ に対する番号 n_0 のひとつを $n(1)$ とすれば，$n \geq n(1)$ のとき，$\|f_n - f_{n(1)}\| < 1/2$．次に，$\varepsilon = 1/2^2$ に対する番号 n_0 で $n(1)$ より大きくものをひとつとり，これを $n(2)$ とする．したがって，$n \geq n(2)$ のとき，$\|f_n - f_{n(2)}\| < 1/2^2$．以下，順々に，$\varepsilon = 1/2^k$ の場合に同様の手続きを繰り返すことにより，数列 $\{n(k)\}_{k=1}^{\infty}$ で

$$n(1) < n(2) < \cdots < n(k) < n(k+1) < \cdots,$$
$$n > n(k) \text{ ならば，} \|f_n - f_{n(k)}\| < 1/2^k$$

をみたすものがとれる．したがって，特に，$\|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\| < \frac{1}{2^k}$ が成立する．これから，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|f_{n(k+1)} - f_{n(k)}\| \leq 1 \tag{A.24}$$

となる．さて，

$$f_{n(k)}(x) = f_{n(1)}(x) + \sum_{j=1}^{k-1}(f_{n(j+1)} - f_{n(j)}) \tag{A.25}$$

と書けることに注意して，右辺がある $f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に収束することを示そう．関数

$$g_k(x) = |f_{n(1)}(x)| + \sum_{j=1}^{k-1} |f_{n(j+1)}(x) - f_{n(j)}(x)|$$

を考える．明らかに，$0 \leq g_1(x) \leq g_2(x) \leq \cdots \leq g_k(x) \leq g_{k+1}(x) \leq \cdots$．したがって，$g(x) := \lim_{k\to\infty} g_k(x)$ は $+\infty$ になる場合も含めて存在し，

$$\int_{\mathsf{X}} g(x)^p d\mu(x) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathsf{X}} g_k(x)^p d\mu(x)$$

が成立する[*8]（この段階では，右辺の極限は有限であるかどうかはわからない）．一方，(A.24) によって，$\|g_k\| \leq \|f_{n(1)}\| + 1$ であるから，$\int_X g(x)^p d\mu(x) \leq (\|f_{n(1)}\|+1)^p < \infty$．したがって，$g(x)$ は a.e. 有限であり，$g \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ である．これから，特に，(A.25) の右辺は，a.e. で絶対収束する．すなわち，$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_{n(k)}(x)$ は a.e.x

---

*8 一般に，X 上で，$0 \leq h_1 \leq h_2 \leq \cdots \leq h_n \leq \cdots$, $\lim_{n\to\infty} h_n = h$ (h_n, h は X 上の可測関数) ならば，$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathsf{X}} h_n d\mu = \int_{\mathsf{X}} h d\mu$ が成り立つ．ただし，等号は，両辺とも無限大になる場合も含む．

に対して存在して，$|f(x)| \le g(x)$ が成り立つ．したがって，$f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ である．一般に，任意の正の数 a, b と $p \ge 1$ に対して，

$$(a+b)^p \le 2^{p-1}(a^p + b^p)$$

が成り立つから，

$$|f_{n(k)} - f(x)|^p \le 2^{p-1}(|f_{n(k)}(x)|^p + |f(x)|^p) \le 2^{p-1}(g(x)^p + |f(x)|^p).$$

すでに示したように，$g^p + |f|^p$ は可積分であるから，ルベーグの優収束定理によって，$\lim_{k\to\infty} \int_{\mathsf{X}} |f_{n(k)}(x) - f(x)|^p d\mu(x) = 0$ が得られる．よって，(A.23) が示された．□

いまの証明から，次の事実も示されたことになる．

定理 A.16　$1 \le p < \infty$ とする．$f_n, f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$, $\|f_n - f\|_p \to 0$ $(n \to \infty)$ ならば，部分列 $\{n_k\}_k$ が存在して $\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) = f(x)$,　μ-a.e.x，が成り立つ．

この定理は,「L^p 収束する点列は適当な部分列を選べば，a.e. の点で収束させることができる」ことを主張しているわけで，理論上，しばしば有用である．

A.8　確率論の基本事項

この節では，測度論の一種としての確率論の初等的な事柄を記述する．

A.8.1　確率空間と確率変数

Ω を空でない集合とし，B を Ω の部分集合からなるひとつのボレル集合体とする．可測空間 (Ω, B) の上に $P(\Omega) = 1$ をみたす測度 P があたえられたとき，三つ組 (Ω, B, P) を**確率空間** (probability space) といい，P を**確率測度** (probability measure) という．

空間 Ω 上で定義された，実数または $\pm\infty$ の値をとる B-可測関数 $X : \Omega \to [-\infty, +\infty]$ が測度 P に関してほとんどいたるところ有限であるとき，X を確率空間 (Ω, B, P) 上の**確率変数** (random variable) という．

確率変数は，そのとりうる値が確率的に分布する変動量を表わすための概念である．確率変数 X と $\mathbb{R}$ のボレル集合 $B \in \mathsf{B}^1$ に対して，

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}. \tag{A.26}$$

とするとき，X が B の中に値をとる確率は

$$P^X(B) := P(\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B\}) = P(X^{-1}(B)) \tag{A.27}$$

によって定義される．これに関して，次の事実が証明される：

定理 A.17 $P^X(\cdot)$ は可測空間 $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の確率測度である.

証明 任意の $B \in \mathsf{B}^1$ に対して，$0 \le P^X(B) \le 1$，$P^X(\emptyset) = 0$ は明らか．$B_n \in \mathsf{B}^1\ (n = 1, 2, \cdots)$, $B_j \cap B_k = \emptyset\,(j \neq k)$，$E_n = \{\omega \in \Omega | X(\omega) \in B_n\}$ とすれば，

$$\{\omega \in \Omega | X(\omega) \in \cup_{n=1}^{\infty} B_n\} = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$$

$j \neq k$ ならば，$E_j \cap E_k = \emptyset$．これらの事実と P の完全加法性により，

$$P^X(\cup_{n=1}^{\infty} B_n) = P(\cup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P^X(B_n).$$

したがって，P^X は完全加法的である．ゆえに，P^X は $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の測度である．

(A.27) によって，$P^X(\mathbb{R}) = P(X^{-1}(\mathbb{R}))$．$X$ は P-a.e. 有限であるから，$P(\Omega \setminus X^{-1}(\mathbb{R})) = 0$．したがって，$P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1$．ゆえに，$P^X(\mathbb{R}) = 1$．これと前半の結果により，題意がしたがう． □

$(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1)$ 上の確率測度 P^X を X の**分布** (distribution) とよぶ．こうして，確率変数 X に対して，確率空間 $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1, P^X)$ がつくられる．

次の定理は，P に関する積分と P^X に関する積分の基本的な関係をあたえる重要な事実である．

定理 A.18 $\mathbb{R}$ 上の任意のボレル可測関数 f に対して，

$$\int_{\Omega} f(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(x)dP^X(x) \tag{A.28}$$

が成り立つ．ただし，どちらか一方の積分は存在するとする．

証明 4 段に分けて証明する．

（第 1 段）まず，$f = \chi_B$ ($B \in \mathsf{B}^1$ の定義関数) の場合に，(A.28) を示す．この場合，(A.28) の右辺は，$P^X(B)$ となる．一方，$f(X(\omega)) = \chi_{X^{-1}(B)}(\omega)$ であるから，(A.28) の左辺は，$P(X^{-1}(B))$ に等しい．だが，これは，(A.27) によって，$P^X(B)$ に等しい．よって，(A.28) が成立する．

（第 2 段）第 1 段の結果と積分の線形性により，(A.28) は $\mathbb{R}$ 上の定義関数の任意の一次結合，すなわち，単純関数（階段関数）に対して成立する．

（第 3 段）$f \ge 0$ の場合，非負の単関数の単調増加列 $\{f_n\}_n$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ をみたすものがとれる．第 2 段の結果により，

$$\int_{\Omega} f_n(X(\omega))dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dP^X(x).$$

この式の右辺は，積分の定義によって，$n \to \infty$ のとき，$\int_{\mathbb{R}} f(x)dP^X(x)$ に収束する．この事実と，

$$0 \le f_1(X(\omega)) \le f_2(X(\omega)) \le \cdots, \ \lim_{n\to\infty} f_n(X(\omega)) = f(X(\omega)), \ \text{a.e.}\omega,$$

によって，単調収束定理（付録 A.3 を参照）を応用することができ，上の式の左辺は，$n \to \infty$ のとき，$\int_{\Omega} f(X(\omega))dP(\omega)$ に収束することがわかる．よって，(A.28) が成立する．

（第 4 段）f が一般の実数値関数の場合は，

$$f = f_+ - f_-, \ f_+(x) := \max\{f(x), 0\} \ge 0, \ f_-(x) = -\min\{f(x), 0\} \ge 0,$$

と表わされるので，$f_\pm$ に第 3 段の結果を応用し，積分の線形性を用いれば，(A.28) の成立が示される．f が複素数値の場合は，$f = f_1 + if_2$ (f_1, f_2 は実数値関数) と表わし，積分の線形性と実数値関数に対して証明された (A.28) を使えばよい．　□

定理 A.18 は，一種の変数変換公式であり，Ω 上の確率変数 X は，確率空間 $(\mathbb{R}, \mathsf{B}^1, P^X)$ 上では，関数 x に“変容”することを示している．

確率変数 X の積分

$$E[X] := \int_{\Omega} X(\omega)dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} xdP^X(x) \tag{A.29}$$

が有限のとき，これを X の**期待値** (expectation) あるいは**平均** (mean, average) とよぶ．これは，確率的に分布する X の値の統計的平均値を表わす．

関数 $(X(\omega) - E(X))^2$ が測度 P について積分可能であるとき，その期待値

$$E[(X - E[X])^2] := \int_{\Omega} (X(\omega) - E(X))^2 dP(\omega) = \int_{\mathbb{R}} (x - E(X))^2 dP^X(\omega) \tag{A.30}$$

を X の**分散** (variance)，その平方根 $\sqrt{E[(X - E[X])^2]}$ を**標準偏差** (standard deviation) という．これらの量は，X の値がその平均値のまわりにどのように分布しているか，その広がり具合に対するひとつの尺度をあたえる量である．分散あるいは標準偏差が小さいほど，X の値の分布は，平均値のまわりに集中していると解釈される．

A.8.2　確率ベクトル

1 個の確率変数だけではなく，いくつかの確率変数の組を考えることも必要であり，また有用でもありうる．確率空間 (Ω, B, P) 上の n 個の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ の組 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ を $\boldsymbol{n}$ **次元確率ベクトル**という．

f を $\mathbb{R}^n$ 上の実数値ボレル可測関数とすれば，写像 $f(X_1, \cdots, X_n) : \omega \to f(X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$ は確率変数である．

1 個の確率変数の場合と同様に，任意の n 次元ボレル集合 B に対して，

$$P^{\mathbf{X}}(B) := P\{\omega \in \Omega | \mathbf{X}(\omega) \in B\} \tag{A.31}$$

とすれば，$P^{\mathbf{X}}$ は，n 次元可測空間 $(\mathbb{R}^n, \mathsf{B}^n)$ 上の確率測度になる．$P^{\mathbf{X}}$ を確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ の**結合分布**あるいは**同時分布**という．定理 A.18 の一般化として次の定理が成り立つ（証明は定理 A.18 のそれと同様）：

定理 A.19 $\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$ を確率空間 (Ω, B, P) 上の確率ベクトル，f を $\mathbb{R}^n$ 上の実数値ボレル可測関数とするとき，

$$E[f(X_1, \cdots, X_n)] = \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \cdots, x_n) dP^{\mathbf{X}}(x_1, \cdots, x_n)$$

が成り立つ．ただし，どちらか一方の積分は存在するとする．

付録B フーリエ変換

この付録では，本文で頻繁に使うことになるフーリエ変換の基本事項をまとめておく．

B.1 基本的な関数空間

$\mathbb{R}^d$ の部分集合 D に対して，$\overline{D}$ によって，D の閉包を表わす：

$$\overline{D} := \{x \in \mathbb{R}^d | \lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ となる } x_n \in D \text{ が存在 }\}. \tag{B.1}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の複素数値関数 f に対して，$f(x)$ が 0 でないような点 $x = (x_1, \cdots, d) \in \mathbb{R}^d$ の集合の閉包を f の台 (support) といい，$\operatorname{supp} f$ で表わす：

$$\operatorname{supp} f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d | f(x) \neq 0\}}. \tag{B.2}$$

$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な関数の全体を $\mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ で表わす．有界な台をもつ無限回微分可能な関数の全体を $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする[*1]．すなわち，$f \in \mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であるとは，$f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ であり，かつ $R > 0$ が存在して，$\operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R}^d | |x| \leq R\}$ が成立することと同値である．

$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する関数の例として，任意の正の定数 a に対して，

$$\varrho(x) = \begin{cases} 0 & ; |x| \geq 1 \text{ のとき} \\ \exp\left(-\frac{a}{1-|x|^2}\right) & ; |x| < 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

によって定義される関数 ϱ がある．この関数の台は $\{x \in \mathbb{R}^d | \ |x| \leq 1\}$ である．任意の $r > 0$ に対して，$\varrho^{(r)}(x) = \varrho(x/r)$ によって定義される関数 $\varrho^{(r)}$ も明らかに $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元であり，その台は $\{x \in \mathbb{R}^d | \ |x| \leq r\}$ である．任意の $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，f と $\varrho^{(r)}$ の積 $f\varrho^{(r)}$ も $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する．こうして，$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の元は "十分たくさん" あることがわかる．

[*1] $\mathbb{R}^d$ の部分集合 D が有界であるとは，それがある半径の球に含まれること，すなわち，定数 $R > 0$ が存在して，$D \subset \{x \in \mathbb{R}^d | |x| \leq R\}$ が成立するときをいう．

空間 $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は，$f, g \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の和 $f+g$ を $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ によって，スカラー倍 $\alpha f (\alpha \in \mathbb{C})$ を $(\alpha f)(x) = \alpha f(x)$ によって定義すれば，複素ベクトル空間になる．

$\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ測度空間 $(\mathbb{R}^d, \mathsf{B}^d, \mu_L^d)$ に関する p 乗可積分関数の同値類の空間を $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ と記す（付録 A.7 を参照）．

$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d), \operatorname{supp} f = K,$ とすれば $\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p dx = \int_K |f(x)|^p dx \le |K| \sup_{x\in K} |f(x)|^p < \infty$（$|K|$ は K のルベーグ測度を表わす）であるから，

$$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d) \tag{B.3}$$

である．

$(\mathsf{X}, \mathsf{B}, \mu)$ を測度空間とし，D を $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ の部分集合とする．任意の $f \in \mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ に対して，

$$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)} \to 0 \ (n \to \infty)$$

となる列 $\{f_n\}_n \subset \mathsf{D}$ が存在するとき，D は $\mathsf{L}^p(\mathsf{X}, d\mu)$ で稠密であるという．

空間 $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ 上の解析において，次の事実は基本的である．

定理 B.1 $1 \le p < \infty$ とする．このとき，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密である．

この定理の成立は以下の二つの補題による．$\mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ を有界な台をもつ，$\mathbb{R}^d$ 上の連続関数の全体とする．

補題 B.2 $\mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ は $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密である．

証明 $\mathbb{R}^d$ 上のルベーグ積分の一般的定理によって，$f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，台が有界な連続関数 f_ε が存在して，$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x) - f_\varepsilon(x)|^p dx < \varepsilon$ が成立する*2．これは，補題の主張を意味する． □

補題 B.3 任意の $f \in \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} \to 0 \ (n \to \infty)$$

となる列 $\{f_n\}_n \subset \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在する．

証明 $f \in \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d), \operatorname{supp} f \subset \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| \le R\} (R > 0$ はある定数$)$ とする．$\varrho \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で $\operatorname{supp} \varrho \subset \{x \in \mathbb{R}^d \,|\, |x| \le 1\}, \varrho \ge 0, \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x) dx = 1,$ をみたすものをひとつとり，

$$f_n(x) = n^d \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(n(x-y)) f(y) dy, \ n = 1, 2, \cdots,$$

*2 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の定理 12.6 およびその証明を参照．

とおく．このとき，$\operatorname{supp} f_n \subset \{x \in \mathbb{R}^d \| x| \le n^{-1} + R\}$ であり，定理 A.8（付録 A.4 を参照）を応用することにより，$f_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ がわかる．さらに，

$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= n^d \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(n(x-y))(f(y) - f(x))dy \\ &= \int_{|z|\le 1} \varrho(z) \left\{ f\left(x - \frac{z}{n}\right) - f(x) \right\} dz. \end{aligned}$$

f の台は有界であるから，f は一様連続である．したがって，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ が存在して，$|x - y| < \delta$ ならば，$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成立する．n_0 を $1/\delta$ 以上の最小の自然数とすれば，$n \ge n_0$ のとき，$|z| \le 1$ ならば，$|z/n| < \delta$．したがって，$|f(x - z/n) - f(x)| < \varepsilon$．ゆえに，$|f_n(x) - f(x)| \le \varepsilon$．これは，$\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^p dx \le \varepsilon^p \int_{|x|\le R+1} dx$ を導く．よって，求める結果が示される．□

定理 B.1 の証明

補題 B.2 によって，任意の $f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} \to 0$ $(n \to \infty)$ となる $\{f_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ が存在する．すなわち，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，番号 n_0 があって，$n \ge n_0$ ならば，$\|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon/2$ が成り立つ．補題 B.3 によって，各 f_n に対して，$\|g_n - f_n\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} < \varepsilon/2$ をみたす $g_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が存在する．3 角不等式によって，$n \ge n_0$ に対して，

$$\|g_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} \le \|g_n - f_n\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} + \|f_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

これは，$\lim_{n\to\infty} \|g_n - f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} = 0$ を意味する．よって題意がしたがう．□

非負の整数 m に対して，関数 $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の，変数 x_j に関する偏導関数を $\partial_j^m f$ と記す：

$$\partial_j^m f(x) := \frac{\partial^m f(x)}{\partial x_j^m} = \frac{\partial^m}{\partial x_j^m} f(x).$$

d 個の非負整数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_d$ の組 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d)$ を**多重指数** (multi-index) とよび，

$$|\alpha| = \sum_{j=1}^d \alpha_j$$

とおく．多重指数 α に対して，偏微分演算子 ∂^α を

$$\partial^\alpha f = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_d^{\alpha_d} f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(\frac{\partial}{\partial x_d}\right)^{\alpha_d} f$$

によって定義する．明らかに，$f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ ならば，$\partial^\alpha f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ である．

$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能な複素数値関数 f は，任意の $m \in \mathbb{N}$ と任意の多重指数 α に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} |x|^m \partial^\alpha f(x) = 0 \tag{B.4}$$

をみたすとき，**急減少関数** (rapidly decreasing function) であるといわれる．これは，つまり，すべての偏導関数が，無限遠において，$|x|$ のどんな負の整数べき乗よりも速く減少するような関数のことである．$\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ で表わす．この集合は，関数の通常の和とスカラー倍に関してベクトル空間になる．明らかに，

$$\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{B.5}$$

例 B.1 $P(x)$ は $x_1, \cdots, x_d$ の任意の多項式とするとき，関数 $P(x)e^{-a|x|^{2n}}$ ($a > 0$ は任意の定数，$n = 1, 2, \cdots$) は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元である．

$x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ と多重指数 α に対して，

$$x^\alpha = \prod_{j=1}^{d} x_j^{\alpha_j} = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_d^{\alpha_d} \tag{B.6}$$

とおく．$|x_j| \le |x|$ であるから，

$$|x^\alpha| \le |x|^{|\alpha|} \tag{B.7}$$

が成立する．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ ならば，(B.4) によって，任意の多重指数 α に対して，

$$x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \quad \partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \tag{B.8}$$

が成立する．したがって，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は，多項式をかける演算と偏微分をする演算に関して不変である．

任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，それらの積 fg は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元であることも容易にわかる．つまり，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は関数の積についても閉じている．

(B.4) によって，任意の非負の整数 m, N に対して，関数

$$|x|^m |\partial^\alpha f(x)|, \quad |x|^{m+N} |\partial^\alpha f(x)|$$

はともに $\mathbb{R}^d$ 上で有界である．そこで，$C = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |x|^m (|x|^N + 1) |\partial^\alpha f(x)|$ とおけば，

$$|x|^m |\partial^\alpha f(x)| \le \frac{C}{|x|^N + 1}, \ x \in \mathbb{R}^d, \tag{B.9}$$

が成り立つ．したがって，任意の $p > 0, q \geq 0$ と多重指数 α に対して $|x|^q|\partial^\alpha f|^p$ はルベーグ測度に関して可積分である．ゆえに，特に，任意の p, $1 \leq p < \infty$, に対して，

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d) \tag{B.10}$$

が成り立つ．これと (B.5) および定理 B.1 から次の事実がしたがう（証明の方法は，定理 B.1 のそれと同様）．

定理 B.4　$1 \leq p < \infty$ とする．このとき，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ で稠密な部分空間である．

B.2　急減少関数の空間上のフーリエ変換

$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，**フーリエ変換** (Fourier transform)$\mathcal{F}f$ を

$$(\mathcal{F}f)(k) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx} dx, \quad k \in \mathbb{R}^d, \tag{B.11}$$

によって定義する．ここで，$kx := \sum_{j=1}^d k_j x_j$ は $x = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ と $k = (k_1, \cdots, k_d) \in \mathbb{R}^d$ のユークリッド内積を表わす．また，

$$(\bar{\mathcal{F}}f)(k) := \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{ikx} dx, \quad k \in \mathbb{R}^d, \tag{B.12}$$

を**共役フーリエ変換** (conjugate Fourier transform) という．明らかに，

$$(\mathcal{F}f)(k) = \bar{\mathcal{F}}f(-k). \tag{B.13}$$

便宜上，

$$\mathcal{F}f = \hat{f}, \quad \bar{\mathcal{F}}f = \check{f}, \tag{B.14}$$

という記法も用いる．

命題 B.5　$\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への線形演算子であって，任意の多重指数 α と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$(\mathcal{F}\partial^\alpha f)(k) \ = \ i^{|\alpha|} k^\alpha (\mathcal{F}f)(k), \tag{B.15}$$

$$(\bar{\mathcal{F}}\partial^\alpha f)(k) \ = \ (-i)^{|\alpha|} k^\alpha (\bar{\mathcal{F}}f)(k), \tag{B.16}$$

が成立する[*3]．

---

*3 ヒルベルト空間とは限らないベクトル空間の場合にも，線形演算子の概念は全く同様に定義される．すなわち，V, W を F 上のベクトル空間 ($\mathsf{F} = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$) とするとき，V から W への写像 T，すなわち，V の各元 v に対して，W の元 $w = T(v)$ をただひとつ定める対応が，

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v), \ u, v \in \mathsf{V}, \alpha, \beta \in \mathbb{F},$$

をみたすとき，T は**線形**であるという．線形な写像を**線形演算子**という．

証明 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とすれば，任意の多重指数 α に対して，$x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は可積分である [(B.10) を参照]．この事実と付録 A の定理 A.8 の応用によって，$\hat{f}$ は変数 $k_1, \cdots, k_d$ について無限回微分可能であり，

$$\partial_k^\alpha \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) e^{-ikx} dx$$

であることがわかる．ここで，∂_k^α は変数 $k = (k_1, \cdots, k_d)$ に関する偏微分を表わす．関係式

$$\left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 \right)^m e^{-ikx} = |k|^{2m} e^{-ikx}, \quad m \in N,$$

に注意すると (∂_{x_j} は変数 x_j に関する偏微分)，

$$\begin{aligned} |k|^{2m} \partial_k^\alpha \hat{f}(k) &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-i)^{|\alpha|} x^\alpha f(x) \left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 \right)^m e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} (-i)^{|\alpha|} \left\{ \left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 \right)^m [x^\alpha f(x)] \right\} e^{-ikx} dx. \end{aligned}$$

ここで，部分積分を行なった $[x^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に注意]．(B.8) によって，$\left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 \right)^m [x^\alpha f(x)]$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元であるから，それは可積分である．したがって，

$$C = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \left| \left(-\sum_{j=1}^d \partial_{x_j}^2 \right)^m [x^\alpha f(x)] \right| dx < \infty$$

とおけば，$|k|^m |\partial_k^\alpha \hat{f}(k)| \le \frac{C}{|k|^m} \to 0$ $(|k| \to \infty)$．$m \in \mathbb{N}$ と多重指数 α は任意であったから，$\hat{f}$ は急減少関数である．$\mathcal{F}$ の線形性は明らかであろう．

部分積分により，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\int_{\mathbb{R}^d} [\partial^\alpha f(x)] e^{-ikx} dx = i^{|\alpha|} k^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx} dx.$$

したがって，(B.15) がでる．$\bar{\mathcal{F}}$ についても同様 [(B.13) を用いよ]． □

本文の第 1 章 1.1 節の例 1.15 で述べるように，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ は

$$\langle f, g \rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} := \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^* g(x) dx, \quad f, g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d), \tag{B.17}$$

を内積として，ヒルベルト空間になる．

定理 B.6 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ からそれ自身への全単射であり，その逆演算子 $\mathcal{F}^{-1}$ は $\bar{\mathcal{F}}$ に等しい：

$$\mathcal{F}^{-1}f(k) = \bar{\mathcal{F}}(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{ikx}dx, \quad k \in \mathbb{R}^d, \tag{B.18}$$

さらに，任意の $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \langle f, g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} \tag{B.19}$$

が成立する（すなわち，$\mathcal{F}$ は内積を保存する）．特に，

$$\|\mathcal{F}f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d). \tag{B.20}$$

証明 任意の $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$f(x) = \bar{\mathcal{F}}g(x) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d} g(k')e^{ik'x}dk'$$

とおけば，命題 B.4 によって，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\left|e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ikx}f(x)\right| \le |f(x)|$$

であり，$|f(x)|$ は可積分であるから，ルベーグの優収束定理（付録 A，定理 A.6）によって，

$$(\mathcal{F}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^d}\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(k)$$

と書ける．ただし，

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(k) &:= (2\pi)^{d/2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ikx}f(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ikx}\left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{ik'x}g(k')dk'\right)dx. \end{aligned} \tag{B.21}$$

ここで，

$$|e^{-\varepsilon|x|^2}e^{-ikx}e^{ik'x}g(k')| = e^{-\varepsilon|x|^2}|g(k')|$$

であり，これは測度 $dx\,dk'$ に関して可積分であるから，フビニの定理 (付録 A，定理 A.10) により，(B.21) の最右辺の積分の順序は交換してもよい．そこで，

$$K_\varepsilon(k) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\varepsilon|x|^2 - ikx}dx$$

とおけば，

$$I_\varepsilon(k) = \int_{\mathbb{R}^d} g(k')K_\varepsilon(k-k')dk$$

と書ける．複素積分を使うことにより，

$$K_\varepsilon(k) = \left(\frac{\pi}{\varepsilon}\right)^{d/2} e^{-k^2/4\varepsilon}$$

と計算される．これと変数変換 $\xi = (k' - k)/2\sqrt{\varepsilon}$ により，

$$I_\varepsilon(k) = (4\pi)^{d/2} \int_{\mathbb{R}^d} g(k + 2\sqrt{\varepsilon}\xi) e^{-\xi^2} d\xi$$

が得られる．$|g(k+2\sqrt{\varepsilon}\xi)| \le \|g\|_\infty$，$\lim_{\varepsilon\to 0} g(k+2\sqrt{\varepsilon}\xi) = g(k)$ であり，$e^{-\xi^2}$ は可積分で，$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\xi^2} d\xi = \pi^{d/2}$ であるから，ルベーグの優収束定理により，$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(k) = (2\pi)^d g(k)$．ゆえに，$\mathcal{F}f = g$ が得られる．g は任意の $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の元であったから，これは

$$\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}} = I \tag{B.22}$$

を意味する．したがって，$\mathcal{F}$ は全射である．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ への写像 R_{S} を

$$(R_{\mathrm{S}}f)(x) = f(-x), \quad x \in \mathbb{R}^d, \tag{B.23}$$

によって定義する[*4]．明らかに，R_{S} は線形であり，全単射である．この演算子を用いると，

$$R_{\mathrm{S}}\mathcal{F} = \bar{\mathcal{F}}, \quad \bar{\mathcal{F}}R_{\mathrm{S}} = \mathcal{F}, \tag{B.24}$$

が成り立つ．これと (B.22) によって，

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = R_{\mathrm{S}}\mathcal{F}\bar{\mathcal{F}}R_{\mathrm{S}} = R_{\mathrm{S}}IR_{\mathrm{S}} = R_{\mathrm{S}}^2.$$

一方，$R_{\mathrm{S}}^2 = I$ であるから，

$$\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F} = I \tag{B.25}$$

を得る．これは $\mathcal{F}$ が単射であることを意味する（$\mathcal{F}f = 0$ ならば，$f = \bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}f = 0$）．以上によって，定理の前半の主張が示されたことになる．

---

*4 演算子 R_{S} は，物理的には，**空間反転** (space inversion) $x \to -x$ に付随する，関数空間上の線形演算子を表わす．

(B.19) は，(B.18) を用いて，次のように示される：

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}f, \mathcal{F}g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d}\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)^* e^{ikx}dx\right)(\mathcal{F}g)(k)dk \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^*\left(\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}(\mathcal{F}g)(k)e^{ikx}dk\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^*(\bar{\mathcal{F}}\mathcal{F}g)(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^* g(x)dx \\ &= \langle f, g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

ここで，第 2 番目の等号における積分の順序交換は，$|f(x)||\mathcal{F}g(k)|$ が $dx\,dk$ について可積分であること，したがって，フビニの定理が適用されることによって正当化される．　□

フーリエ変換に関連して，便宜上，$\mathbb{R}^d$ の点を $x=(x_1,\cdots,x_d)$ と表わす場合，$\mathbb{R}^d$ を $\mathbb{R}^d_x$ と表わす場合がある（変数 k についても同様）．この記法を用いると，定理 B.6 に述べた，$\mathcal{F}$ の全射性はもっと明確に表現することができる．すなわち，

$$\mathcal{F}\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_k). \tag{B.26}$$

B.3　$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換

定理 B.6 によって，フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ を定義域とする，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $L^2(\mathbb{R}^d_k)$ への等長演算子とみることができる[*5]．この事実と定理 B.4 および有界演算子の拡大定理（第 1 章 1.2 節，定理 1.31）を用いると，$\mathcal{F}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_k)$ へのユニタリ変換（ユニタリ演算子）へと一意的に拡大されることがわかる．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 B.7　$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_k)$ へのユニタリ変換 $\widehat{\mathcal{F}}$ で，$\mathcal{F}\subset\widehat{\mathcal{F}}$ となるものがただひとつ存在する．特に，任意の $f,g\in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\langle \widehat{\mathcal{F}}f, \widehat{\mathcal{F}}g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} = \langle f, g\rangle_{\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)} \tag{B.27}$$

が成立する．

---

*5　第 1 章 1.4 節 1.4.1 項を参照．

証明　上に述べたことにより，$L^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_k)$ への有界演算子 $\widehat{\mathcal{F}}$ で，$\mathcal{F} \subset \widehat{\mathcal{F}}, \|\widehat{\mathcal{F}}\| = \|\mathcal{F}\| = 1$ となるものがただひとつ存在する（第 1 章 1.2 節，定理 1.31 の応用）．定理 1.31 の証明から，任意の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ に対して，$\|\widehat{\mathcal{F}}f - \mathcal{F}f_n\| \to 0\ (n \to \infty)$ である（$\|\cdot\|$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ のノルム）．ここで，$\{f_n\}_n \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ は，$\|f_n - f\| \to 0\ (n \to \infty)$ をみたす関数列ならば何でもよい．このことと (B.19) および内積の連続性により，$\widehat{\mathcal{F}}$ は内積を保存することがわかる．すなわち，(B.27) が成立する．任意の $g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_k)$ に対して，定理 B.4 によって，$\|g_n - g\| \to 0\ (n \to \infty)$ となる $g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_k)$ が存在する．このとき，定理 B.6 によって，各 n に対して，$g_n = \mathcal{F}f_n$ となる $f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d_x)$ がただひとつ定まる．(B.20) によって，$\|g_n - g_m\| = \|f_n - f_m\|$ であるから，$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ はコーシー列になる．したがって，$f = \lim_{n\to\infty} f_n \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ が存在する．ゆえに，

$$\begin{aligned}\|\widehat{\mathcal{F}}f - g\| &\le \|\widehat{\mathcal{F}}f - \mathcal{F}f_n\| + \|\mathcal{F}f_n - g\| \\ &= \|f - f_n\| + \|g_n - g\| \\ &\to 0\ (n \to \infty).\end{aligned}$$

これは，$g = \widehat{\mathcal{F}}f$ を意味する．したがって，$\widehat{\mathcal{F}}$ は全射である．こうして，$\widehat{\mathcal{F}}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_x)$ から $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d_k)$ へのユニタリ演算子であることがわかる．□

ユニタリ変換 $\widehat{\mathcal{F}}$ を $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ **上のフーリエ変換**という．(B.27) を（フーリエ変換に関する）**パーセヴァルの等式**という．

演算子 $\widehat{\mathcal{F}}$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換 $\mathcal{F}$ の拡大であるので，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に属さない $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては，その作用 $\widehat{\mathcal{F}}f$ がどのような形をとるかは，ただちに明らかではない．$\widehat{\mathcal{F}}f$ も (B.11) の右辺の形であたえられれば都合がよい．だが，(B.11) の右辺は f が可積分でなければ意味をもたない．一方，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の元で可積分でない元はたくさんある[*6]．したがって，いま述べたことは期待できない．しかし，以下に示すように (B.11) の等号の意味を変更することにより，$\widehat{\mathcal{F}}f$ は (B.11) のある種の一般化としてあたえられることがわかる．

この問題を考察するには，まず，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の部分空間で $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ よりも真に大きいものに属する元に対して，$\widehat{\mathcal{F}}$ の作用を求めるとよい．

定理 B.8　任意の $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.}k. \tag{B.28}$$

証明　証明を通して，L^2 ノルムを単に $\|\cdot\|$ と表わす．まず，任意の $f \in \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，(B.28) を示す．$f_n \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を定理 B.3 の証明のものと

[*6] たとえば，$f(x) = (1 + |x|)^{-p}$, $x \in \mathbb{R}^d$, によって定義される関数 f（の同値類）は，$d/2 < p < d$ のとき，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の元であるが，可積分ではない．

する．このとき，$\|f_n - f\| \to 0$ ($\varepsilon \to 0$) であるから，$\|\widehat{\mathcal{F}}f_n - \widehat{\mathcal{F}}f\| \to 0$ ($n \to \infty$)．したがって，付録 A，定理 A.16 によって，$n_j \to 0$ ($j \to \infty$) となる部分列 $\{n_j\}_{j=1}^{\infty}$ が存在して，$\lim_{j\to\infty}(\widehat{\mathcal{F}}f_{n_j})(k) = (\widehat{\mathcal{F}}f)(k)$, a.e.$k$, が成立する．これと $\widehat{\mathcal{F}}f_{n_j} = \mathcal{F}f_{n_j}$ によって，

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_{n_j}(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.}k.$$

定理 B.3 の証明から，右辺に対してルベーグの優収束定理を応用することができるので，(B.28) が得られる．

次に，台が有界な $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，(B.28) を示す．$R > 0$ に対して，

$$V_R := \{x \in \mathbb{R}^d | \ |x| \le R\} \tag{B.29}$$

とおく．仮定により，$\mathrm{supp}\, f \subset V_R$ となる $R > 0$ がある．このとき，R を十分大きくとれば，$\mathrm{supp}\, f_n \subset V_R, n = 1, 2, \cdots$，$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\| = 0$ をみたす関数列 $\{f_n\}_n \subset \mathsf{C}_0(\mathbb{R}^d)$ がとれる*7．したがって，$\|\widehat{\mathcal{F}}f_n - \widehat{\mathcal{F}}f\| \to 0$ ($n \to \infty$)．これと前段の結果および付録 A，定理 A.16 により，$\{f_n\}_n$ の部分列 $\{f_{n(j)}\}_j$ で

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f_{n(j)}(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.}k,$$

をみたすものが存在する．関数 f_n, f の台の特性とシュヴァルツの不等式によって，

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\mathbb{R}^d} f_{n(j)}(x) e^{-ikx} dx - \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ikx} dx \right| \\
&= \left| \int_{V_R} (f_{n(j)}(x) - f(x)) e^{-ikx} dx \right| \\
&\le |V_R|^{1/2} \left(\int_{V_R} |f_{n(j)}(x) - f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\
&\to 0 \ (j \to \infty).
\end{aligned}$$

したがって，(B.28) が得られる．

一般の $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては，$f_R = \chi_{V_R} f$ とすれば，前段の結果により，

$$(\widehat{\mathcal{F}}f_R)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x|\le R} f(x) e^{-ikx} dx, \quad \text{a.e.}k. \tag{B.30}$$

容易にわかるように，$\|f_R - f\| \to 0$ ($R \to \infty$)．したがって，$\|\widehat{\mathcal{F}}f_R - \widehat{\mathcal{F}}f\| \to 0$ ($R \to \infty$)．したがって，$R_n \to \infty$ ($n \to \infty$) となる数列 $\{R_n\}_n$ が存在して，

---

*7 伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の p.83, 定理 12.6 を参照．

$(\widehat{\mathcal{F}}f_{R_n})(k) \to (\widehat{\mathcal{F}}f)(k)$, a.e.$k$ $(n \to \infty)$．一方，(B.30) とルベーグの優収束定理によって ($f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ に注意),

$$(\widehat{\mathcal{F}}f_{R_n})(k) \to \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-ikx}dx, \ \text{a.e.}k \ (n \to \infty)$$

ゆえに (B.28) を得る． □

以上の準備のもとで，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ の一般の元 f に対する $\widehat{\mathcal{F}}f$ を求めることができる．

定理 B.9 任意の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| (\widehat{\mathcal{F}}f)(k) - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x|\le R} f(x)e^{-ikx}dx \right|^2 dk = 0. \tag{B.31}$$

さらに，$\widehat{\mathcal{F}}$ の逆演算子は，任意の $g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\lim_{K\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \left| (\widehat{\mathcal{F}}^{-1}g)(x) - \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|k|\le K} g(k)e^{ikx}dk \right|^2 dx = 0, \tag{B.32}$$

によってあたえられる．

証明 $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ と $R > 0$ に対して，$f_R = \chi_{V_R} f$ とおけば，$f_R \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d) \cap \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ であるから，定理 B.8 によって，

$$(\widehat{\mathcal{F}}f_R)(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x|\le R} f(x)e^{-ikx}dx, \quad \text{a.e.}k.$$

一方，$\|f_R - f\| \to 0$ $(R \to \infty)$ であるから，$\|\widehat{\mathcal{F}}f_R - \widehat{\mathcal{F}}f\| \to 0$ $(R \to \infty)$．したがって，(B.31) が得られる．(B.32) も同様して証明される． □

付録 A の (A.22) で導入した平均 2 乗収束の記号 l.i.m. を用いれば，(B.31) は，

$$(\widehat{\mathcal{F}}f)(k) = \text{l.i.m.}_{R\to\infty} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{|x|\le R} f(x)e^{-ikx}dx \tag{B.33}$$

と書ける ($\widehat{\mathcal{F}}^{-1}g$, $g \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$, についても同様)．こうして，一般の $f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対するフーリエ変換 $\widehat{\mathcal{F}}f$ は，(B.11) の右辺の積分を有界領域の積分の極限としてとらえ，その収束の意味を平均 2 乗収束の意味で考えたものよってあたえられることがわかる．(B.32) はフーリエ変換の**反転公式** (inversion formula) とよばれる．フーリエ変換の逆演算子 $\widehat{\mathcal{F}}^{-1}$ を**逆フーリエ変換**という．

以下および本文においては，記号上の簡潔さのため，$\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換 $\widehat{\mathcal{F}}$ も単に $\mathcal{F}$ と記すことにする．また，$f \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ に対して，そのフーリエ変換を $\hat{f}$，逆フーリエ変換を $\check{f}$ と記す．

B.4 $\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ 上のフーリエ変換

$f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ に対しては，(B.11) の右辺は意味をもつので，これによって，f のフーリエ変換 $\mathcal{F}f$ を定義する．$\mathcal{F}f$ を $\hat{f}$ とも記す．次の事実は基本的である．

定理 B.10 任意の $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\hat{f}$ は，$\mathbb{R}^d$ 上の有界な連続関数であり，

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\|f\|_{\mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)} \tag{B.34}$$

が成り立つ．

証明 $\hat{f}$ が有界で (B.34) が成り立つことは，簡単な積分評価

$$\left|\hat{f}(k)\right| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|dx, \quad k \in \mathbb{R}^d.$$

による．任意の $k, q \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\left|\hat{f}(k+q) - \hat{f}(k)\right| \le \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|\,|e^{-iqx}-1|dx. \tag{B.35}$$

他方，$g_q(x) := |f(x)|\,|e^{-iqx}-1| \le 2|f(x)|$ である．$|f(x)|$ は可積分であり，$\lim_{q\to 0} g_q(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$，であるから，ルベーグの優収束定理（付録 A，定理 A.6）を応用できて，(B.35) の右辺は，$q \to 0$ のとき，0 に収束する．したがって，$\hat{f}$ は連続である． □

次の事実は重要である：

定理 B.11 リーマン-ルベーグの補題． $f \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ ならば，各 $j = 1, \cdots, d$ に対して，

$$\lim_{|k_j|\to\infty}\hat{f}(k) = 0. \tag{B.36}$$

証明 $\mathbb{R}^d$ の点 x を $x = (x_1, \tilde{x}), \tilde{x} \in \mathbb{R}^{d-1}$, のように表わす．するとフビニの定理によって，

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{R}} F(t, \tilde{k})e^{-ik_1 t}dt$$

と書ける．ただし，

$$F(t, \tilde{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^{d-1}} f(t, \tilde{x})e^{-i\tilde{k}\tilde{x}}d\tilde{x}.$$

$|k_1|$ は十分大きいとする．$e^{-ik_1t} = -e^{-ik_1(t-\pi/k_1)}$ であるから，

$$\hat{f}(k) = -\int_{\mathbb{R}} F(t,\tilde{k})e^{-ik_1(t-\pi/k_1)}dt = -\int_{\mathbb{R}} F\left(t+\frac{\pi}{k_1},\tilde{k}\right)e^{-ik_1t}dt.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\hat{f}(k) &= \frac{1}{2}\left\{\int_{\mathbb{R}} F(t,\tilde{k})e^{-ik_1t}dt - \int_{\mathbb{R}} F\left(t+\frac{\pi}{k_1},\tilde{k}\right)e^{-ik_1t}dt\right\} \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}\left\{F(t,\tilde{k}) - F\left(t+\frac{\pi}{k_1},\tilde{k}\right)\right\}e^{-ik_1t}dt.\end{aligned}$$

ゆえに

$$2|\hat{f}(k)| \le \int_{\mathbb{R}}\left|F(t,\tilde{k}) - F\left(t+\frac{\pi}{k_1},\tilde{k}\right)\right|dt.$$

ルベーグ積分の基本定理により（たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の定理 12.8），この不等式の右辺は，$|k_1| \to \infty$ としたとき，0 に収束する．したがって，$j=1$ に対して，(B.36) が成立する．

変数 $k_j\,(j \ne 1)$ についても同様（次のようにすると簡単である：$g(x) = f(x_j, x_2, \cdots, x_{j-1}, x_1, x_{j+1}, \cdots, x_d)$ とすれば，

$$\hat{g}(k_j, k_2, \cdots, k_{j-1}, k_1, k_{j+1}, \cdots, k_d) = \hat{f}(k)$$

であり，前段の結果より，$\lim_{|k_j|\to\infty} \hat{g}(k_j, k_2, \cdots, k_{j-1}, k_1, k_{j+1}, \cdots, k_d) = 0$ であるから，(B.36) が得られる）． □

付録C 超関数論要項

この付録では，超関数論の基本的な事項を本文で使う範囲内においてまとめておく．超関数論にはじめてふれる読者にもこれを理解し使えるように配慮して書いたつもりである．そういう意味では，この付録は，超関数論の短い入門コースでもある．

超関数というのは，要するに，従来の関数概念の一般化である．この一般化は，関数の収束に関する位相を変える（“弱くする”）ことによって達成される．この点さえおさえておけば，超関数論を理解するのは困難なことではない．超関数の理論は位相というものの重要性を示すとともに，20 世紀の数学の世界に大きな刺激と稔りをもたらした*1.

C.1 試験関数の空間

付録 B において，$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能で有界な台をもつ関数の空間 $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を導入した．そこでは，この空間は $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ の部分空間として扱われただけであった．だが，L^p 空間から定まる位相以外の位相（元の間の “近さ”を測る概念）を $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に導入することも可能である*2.

定義 C.1 $\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に属する関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が，$n\to\infty$ のとき，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ の関数 f に収束するというのは次の条件 (i), (ii) がみたされることをいう：

(i) f_n の台は，n に依存しない，同一の有界閉集合に含まれる．すなわち，ある有界閉集合 K が存在して，すべての $n=1,2,\cdots,$ に対して，$\operatorname{supp} f_n \subset K$.

(ii) すべての多重指数 α に対して，$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}|\partial^\alpha(f_n(x)-f(x))|\to 0\ (n\to\infty)$.

---

*1 この付録で扱わない，超関数論の主題については，たとえば，L. シュワルツ (Schwartz)『超関数論』(岩波書店，1953)，同『物理数学の方法』(同書店，1966)，I.M. Gel'fand and G.E. Shilov: *Generalized Functions*, Vol.I, II (Academic Press, 1964, 1968), 垣田高夫『シュワルツ超関数入門』(日本評論社) 等を参照されたい．

*2 位相空間論では「コンパクト集合」という概念がある．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の場合，部分集合がコンパクト集合であるための必要十分条件はそれが有界閉集合であることである（たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』(裳華房) の付録の §3 を参照)．本来は，$\mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は，「$\mathbb{R}^d$ 上の無限回微分可能で，コンパクトな台をもつ関数の空間」として定義される．この方がその本質にかなっているのである．なぜなら，こちらの定義は，もっと一般の位相空間の場合へと自然に拡大されうるからである．

この定義の条件 (ii) は，f_n のすべての偏導関数が，f の対応する偏導関数に一様収束することと同等である．$K \cup \mathrm{supp}\, f = M$ とすれば，(ii) で sup をとる範囲は，実際には，M でよいことに注意しよう．関数列の一様収束は，各点収束を意味するから[*3]，結果的に，$\mathrm{supp}\, f \subset K$ であることがわかる．

定義 C.1 のような仕方で収束が定義された空間 $\mathrm{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ と記し，これを**試験関数** (test function) **の空間**という．上の意味で，f_n が f に収束することを f_n は f に $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ **の位相で収束する**あるいは $\mathcal{D}$ **収束**するという．これを記号的に $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ $(n \to \infty)$ と記すこともある．空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ は単なるベクトル空間ではなく，いま述べた意味での位相の入った空間である．一般に位相の入ったベクトル空間は**位相線形 (ベクトル) 空間** (topological vector space) とよばれるが，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ はそのような空間の一例である[*4]．

C.2 超　関　数

空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathbb{C}$ への写像，すなわち，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の汎関数 $\phi : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ について，任意の $f, g, \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ と複素数 λ, μ に対して，

$$\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g) \quad (線形性) \tag{C.1}$$

が成立するとき，ϕ を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の**線形汎関数** (linear functional) という．さらに，$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f$ のとき，つねに $\phi(f_n) \to \phi(f)$ ならば，ϕ は**連続**であるという．$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の連続な線形汎関数のことを $\mathbb{R}^d$ **上の超関数** (distribution) という．$\mathbb{R}^d$ 上の超関数の全体を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ あるいは $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)^*$ で表わす．

超関数の例はあとで見ることにして，定義を続けよう．

二つの超関数 ϕ_1, ϕ_2 が，任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi_1(f) = \phi_2(f)$ をみたすとき，ϕ_1 と ϕ_2 は等しいといい，$\phi_1 = \phi_2$ と書く．

任意の二つの超関数 ϕ_1, ϕ_2 に対して，それらの和 $\phi_1 + \phi_2$ を

$$(\phi_1 + \phi_2)(f) = \phi_1(f) + \phi_2(f), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.2}$$

によって定義すれば，$\phi_1 + \phi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ である．なぜなら，$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\phi_j(f_n) \to \phi_j(f)$，$j = 1, 2$，$(n \to \infty)$ であり，したがって，$(\phi_1 + \phi_2)(f_n) \to (\phi_1 + \phi_2)(f)$ $(n \to \infty)$ となるからである．同様に，$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ と複素数 λ に対して，

$$(\lambda\phi)(f) = \lambda\phi(f), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.3}$$

---

*3 各 $x \in \mathbb{R}^d$ ごとに，$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が成り立つとき，$\{f_n\}_n$ は f に**各点収束** (point-wise convergence) するという．

*4 位相空間の概念は一般的に定義されるが，ここではそれは必要ないので省略する．

によって定義される $\lambda\phi$ も超関数である．こうして，超関数の空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ には，和とスカラー倍（複素数倍）の演算が定義され，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ は，これらの演算に関して複素ベクトル空間になる．

超関数の空間 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ にも位相が定義される．すなわち，超関数列 $\{\phi_n\}_n$ に対して，超関数 ϕ があって，すべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(f) = \phi(f)$$

が成立するとき，$\{\phi_n\}_n$ は ϕ に**（超関数の意味で）収束する**といい，$\lim_{n\to\infty}\phi_n = \phi$ と書く．明確さを期す場合には，$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \phi$ あるいは $\lim_{n\to\infty}\phi_n = \phi$（$\mathcal{D}'$ 収束）と書く．こうして，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ は位相線形空間になる．

超関数列 $\{\phi_n\}_n$ について，すべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，複素数列 $\{\phi_n(f)\}_n$ がコーシー列であるとき（したがって，$\{\phi_n(f)\}_n$ は $\mathbb{C}$ の収束列），$\{\phi_n\}_n$ を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の**コーシー列**あるいは**基本列**とよぶ．超関数の空間に関する次の定理は基本的である．

定理 C.2 $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の任意のコーシー列は収束列である．すなわち，任意のコーシー列 $\{\phi_n\}_n \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ が存在して，$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \phi$ となる．

定理 C.2 にいう性質を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の**完備性**という．

付録 B の B.1 節で見たように，普通の関数に対して，台という概念が定義された．超関数に対しても次に述べるように，台という概念が定義される．

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を開集合とし，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ の関数で Ω の中に台をもつものの全体を $\mathcal{D}(\Omega)$ と記す．$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ としよう．任意の $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\phi(f) = 0$ が成り立つような最大の開集合 Ω の補集合を ϕ の**台**とよび，これを $\operatorname{supp}\phi$ と記す．

普通の関数の正値性の概念も超関数に拡大される．すなわち，超関数 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ が非負であるというのは，$f \geq 0$ なる任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi(f) \geq 0$ が成り立つことをいう．ϕ が非負であることを $\phi \geq 0$ と記す．この正値性の概念を用いると，超関数の空間にひとつの順序関係 $\leq$ が導入される．すなわち，$\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して $\phi_1 - \phi_2$ が非負ならば，$\phi_2 \leq \phi_1$ と定義する*5．

任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi(f)^* = \phi(f^*)$ をみたす超関数 ϕ を**実超関数**という*6．これは，実数値関数の一般化された概念である．

任意の $u \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ と $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$uf \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ であることは容易にわかる．つまり，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ は，C^∞ 関数をかける演算によって不変である．したがって，任意の $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，

$$\phi_u(f) = \phi(uf), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.4}$$

---

*5 $\phi_1 \geq \phi_2$ とも書く．

*6 複素数 z に対して，z^* は z の共役複素数を表わす．

によって，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 ϕ_u が定義される．$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ のとき，$uf_n \xrightarrow{\mathcal{D}} uf$ であるから，$\phi_u \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ となる．この超関数 ϕ_u を u と ϕ の**積**とよび，$u\phi$ と書く．したがって，$(u\phi)(f) = \phi(uf)$.

超関数の例をみよう．

C.2.1 局所可積分関数の空間

$1 \le p < \infty$ としよう．任意の有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\int_K |f(x)|^p dx < \infty$$

となる可測関数 f は **p 乗局所可積分**であるといい，そのような関数の全体を $\mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ で表わす[*7]．容易にわかるように，$f \in \mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ であることと，任意の $R > 0$ に対して，$\int_{|x| \le R} |f(x)|^p dx < \infty$ であることは同値である．

特に，$\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の元を**局所可積分関数** (locally integrable function) という．

たとえば，$\mathbb{R}^d$ 上の任意の連続関数は p 乗局所可積分である．これは，任意の連続関数は有界閉集合上で最大値をもつ，という初等解析学の基本的事実と有界閉集合のルベーグ測度は有限であることを使えば容易にわかる．

一般的に，$p \ge 1$ ならば

$$\mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \tag{C.5}$$

という関係が成り立つ．なぜなら，K を有界閉集合，$f \in \mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$，$p^{-1} + q^{-1} = 1$，とすれば，ヘルダー (Hölder) の不等式[*8]により

$$\begin{aligned}\int_K |f(x)|dx &\le \left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \left\{\int_K 1^q dx\right\}^{1/q} \\ &= \left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p} |K|^{1/q} < \infty\end{aligned}$$

となるからである．ここで，$|K|$ は K のルベーグ測度を表わす．

集合 $\mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p < \infty)$ はベクトル空間である．$f_n \in \mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が $f \in \mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に収束することを

$$\int_K |f_n(x) - f(x)|^p dx \to 0 \ (n \to \infty)$$

がすべての有界閉集合 K に対して成り立つことであると定義する．これによって，$\mathsf{L}^p_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ は位相空間になる．

---

*7 "loc"は "local"(局所的) の略．

*8 付録 D を参照．

任意の $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ を固定し，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の汎関数 ϕ_g を

$$\phi_g(f) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx, \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.6}$$

によって定義しよう．関数 g の局所可積分性により，

$$C_f(g) := \int_{\mathrm{supp}\, f} |g(x)|dx, \tag{C.7}$$

は有限であり，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)f(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\ |f(x)|dx \le C_f(g)\|f\|_\infty < \infty.$$

が成り立つ．ただし，

$$\|f\|_\infty := \mathrm{ess.sup}_{x\in\mathbb{R}^d}|f(x)|. \tag{C.8}$$

したがって，$\phi_g(f)$ はすべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して定義され，

$$|\phi_g(f)| \le C_f(g)\|f\|_\infty, \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.9}$$

が成り立つ．$\phi_g(f)$ が f について線形であることは明らかである．さて，$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ としよう．K を $\mathrm{supp}\, f_n, \mathrm{supp}\, f \subset K$ となる有界閉集合とすれば，

$$C_{f_n - f}(g) \le \int_K |g(x)|dx \equiv C$$

であるから，

$$|\phi_g(f_n) - \phi_g(f)| = |\phi_g(f_n - f)| \le C\|f_n - f\|_\infty.$$

一方，$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，上の不等式から，$\phi_g(f_n) \to \phi_g(f) \quad (n \to \infty)$ となる．したがって，ϕ_g は超関数である．こうして，各 $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対して，超関数 ϕ_g が対応することがわかった．この対応は 1 対 1 であろうか．この問いに答えるのが次の補題である．

補題 C.3　ドゥ・ボワ・レイモン (du Bois-Reymond) **の補題．** Ω を $\mathbb{R}^d$ の任意の開集合とし，$g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ とする．もし，すべての $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx = 0$ ならば，$g(x) = 0$, a.e.$x \in \Omega$ である．

この補題は，$\mathbb{R}^d$ 上の解析学のひとつの基礎をなす補題であり，**変分法の基本補題**ともよばれる．証明については，たとえば，黒田成俊『関数解析』（共立出版，1980）の 6.2 節，L. シュワルツ『物理数学の方法』（岩波書店）の 2 章を参照されたい．

補題 C.3 を用いると，$g, h \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が $\phi_g = \phi_h$ をみたすならば，$g = h$ a.e. であることがわかる．実際，$\phi_g = \phi_h$ は，すべての $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\phi_g(f) = \phi_h(f)$ であること，すなわち，$\int_{\mathbb{R}^d}(g(x) - h(x))f(x)dx = 0$ を意味するから，補題 C.3 によって，$g(x) - h(x) = 0$ a.e.x となる．したがって，$\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ への写像 $\phi : g \to \phi_g$ は 1 対 1 である．この写像は $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ への埋め込みをあたえる．この意味で $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ と ϕ_g を同一視して，$\phi_g(f) = g(f)$ と書く．この同一視の意味で，

$$\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)' \tag{C.10}$$

が成り立つことが示されたことになる．特に，$\mathsf{C}(\mathbb{R}^d)$ を $\mathbb{R}^d$ 上の連続関数の全体とすれば，これは $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の部分空間であるから，

$$\mathsf{C}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'. \tag{C.11}$$

こうして，超関数は確かに通常の関数の一般化になっていることがわかる．

もし，g が連続関数で，その台が K であるとすれば，超関数 ϕ_g の台も K である．これは次のようにしてわかる．$f \in \mathcal{D}(K^c)$ とすれば，$\int_{\mathbb{R}^d} g(x)f(x)dx = 0$ であるから，$\phi_g(f) = 0$. 仮に，K^c より真に大きな開集合 Ω があって，すべての $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ に対して，$\phi_g(f) = 0$ としてみよう．このとき，$\Omega \setminus \overline{K^c}$ は開集合である．この集合の中の任意の一点 a をとると，$g(a) \neq 0$ であり，g は連続関数であるから，a の十分小さな近傍 U_a で $\bar{U}_a \subset \Omega$ をみたし，U_a 上では $g(x)$ が定符号であるようなものが存在する．そこで，$x \in U_a$ に対して，$g(x) > 0$ として一般性を失わない．一方，$x \in U_a$ ならば，$\mathrm{supp}\ f \subset U_a$ かつ U_a の内部で $f(x) > 0$ をみたす $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ がとれる．すると，$\phi_g(f) = \int_{U_a} g(x)f(x)dx > 0$ となるから矛盾である．よって，ϕ_g の台は K である．

$g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が非負であれば，$\phi_g \geq 0$ となることは明らかであろう．この意味で，確かに，超関数の非負性の概念は関数のそれのある種の一般化になっているといえる．

超関数 ϕ が上述した意味で局所可積分関数 g によってあたえられる場合，ϕ は関数 g と同一視できる，という言い方をする．もちろん，この同一視は，ルベーグ測度についてほとんどいたるところの点におけるそれである．

局所可積分関数に関する上述の事実に基づいて，超関数 ϕ が局所可積分関数であたえられない場合でも，**超関数核**とよばれる，象徴としての記号 $\phi(x)$ を導入し，

$$\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)f(x)dx \tag{C.12}$$

というふうに書くことがある（$g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に対する超関数 ϕ_g の超関数核は $g(x)$ である）．超関数 ϕ_1, ϕ_2 に対して，$\phi_1 = \phi_2$ のこと（すなわち，$\phi_1(f) = \phi_2(f), \forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$）を象徴的に $\phi_1(x) = \phi_2(x)$ と表わす．

次の事実も応用上重要である．

定理 C.4 $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の関数 g_n が $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ の位相で $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に収束するとしよう．このとき，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の位相で，g_n は g に収束する．

証明 任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して，(C.9) によって，$|g_n(f)-g(f)| \le C_f(g_n-g)\|f\|_\infty$. 仮定から，$C_f(g_n - g) \to 0$ $(n \to \infty)$ となるから，$g_n(f) \to g(f)$ $(n \to \infty)$ である． □

C.2.2 ディラックのデルタ超関数

ユークリッド空間 $\mathbb{R}^d$ の任意の点 a を固定し，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 δ_a を

$$\delta_a(f) = f(a), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.13}$$

によって定義する．$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ とすれば，$\|f_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ であるから，当然，各 $x \in \mathbb{R}^d$ に対して，$f_n(x) \to f(x)$ $(n \to \infty)$ である．したがって，$\delta_a(f_n) \to \delta_a(f)$ $(n \to \infty)$ となる．ゆえに，$\delta_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$, すなわち，$\delta_a$ は超関数である．これを点 a に質量をもつ，d 次元の**ディラック** (P. A. M. Dirac) **のデルタ超関数**という．考えている次元を明確にしたい場合は，$\delta_a = \delta_a^d$ と書く．

関数 $f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ が $\operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}^d \setminus \{a\}$ をみたすならば，$f(a) = 0$ であるから，$\delta_a(f) = 0$. したがって，δ_a の台は $\{a\}$ である：

$$\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}. \tag{C.14}$$

容易にわかるように，δ_a は実超関数である．さらに，$f \ge 0$ ならば，$f(a) \ge 0$ であるから，$\delta_a(f) \ge 0$ である．ゆえに，δ_a は非負の超関数である．

$a = 0$ のとき δ_a を単に δ 記す：

$$\delta_0 = \delta. \tag{C.15}$$

ここで，ディラックのデルタ超関数について若干の注意をしておこう．この超関数は，歴史的には，量子力学の理論的整備の過程で Dirac によって導入された．彼は，次の性質をみたす $\mathbb{R}$ 上の関数 $\delta(x)$—“デルタ関数”—を仮想的に導入した：

$$\delta(x) = \delta(-x), \tag{C.16a}$$

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & ; x \neq 0 \\ +\infty & ; x = 0 \end{cases} \tag{C.16b}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1. \tag{C.16c}$$

ついでに言えば，d 次元のデルタ関数 $\delta^d(x)$ は，1次元のデルタ関数の積 $\delta^d(x) = \delta(x_1)\cdots\delta(x_d)$ によって定義される．しかし，J. von Neumann が指摘したように，このような関数 $\delta(x)$ はルベーグ可測関数としては存在しない．実際，もし，そのようなルベーグ可測関数 $\delta(x)$ が存在したとすれば，性質 (C.16b) は $\delta(x) = 0$ a.e.（ルベーグ測度について）を意味する（$\{0\}$ のルベーグ測度は 0 であることに注意）．したがって，(C.16c) の左辺の積分をルベーグ積分の意味でとると，それは 0 に等しい．だが，これは (C.16c) の右辺と矛盾する．

この von Neumann の指摘によって，ディラックのデルタ関数の数学的実在性は，数学者からは，当初，疑問視された．この疑義が完全にとりはらわれるためには，L. シュワルツの超関数論 (1950～51) の出現を待たねばならなかった．この理論によって，はじめて，$\delta^d(x)$ に厳密な意味があたえられたのである．すなわち，シュワルツの超関数論では，$\delta^d(x)$ を上述の意味でのデルタ超関数 δ_0^d の超関数核とみなおすのである：

$$\delta_0^d(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta^d(x) f(x) dx, \quad f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{C.17a}$$

なお，超関数 δ_a^d の超関数核は $\delta^d(x-a)$ とみる：

$$\delta_a^d(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \delta^d(x-a) f(x) dx, \quad f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d). \tag{C.17b}$$

このような歴史的経緯によって，超関数 δ_a は，慣習的には，“ディラックのデルタ関数”とよばれる場合がある．だが，すでに注意したように，それはルベーグ可測関数ではありえないので，この呼称は誤解を招く言い方である．

これと関連して，δ_a は局所可積分関数から決まる超関数ではありえないことを示すことができる．実際，仮に，$\delta_a(f) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x) dx$, $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, をみたす $g \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ があったとしよう．このとき，$f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \setminus \{a\})$ とすれば，$\int_{\mathbb{R}^d} g(x) f(x) dx = 0$．ゆえに，ドゥ・ボワ・レイモンの補題により，$g(x) = 0$, a.e.$x \in \mathbb{R}^d \setminus \{a\}$．1点からなる集合 $\{a\}$ のルベーグ測度は 0 であるから，結局，$g(x) = 0$, a.e.$x \in \mathbb{R}^d$．これは，すべての $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\delta_a(f) = 0$ を意味するので矛盾である．

しかし，こうした事情にもかかわらず，$\delta^d(x-a)$（あるいは単に $\delta(x-a)$ と記す）という象徴的記法は有用である．シュワルツの超関数論によってあたえられる，その厳密な意味さえつかんでいれば混乱の恐れはない[*9]．本書でも，しばしば，記号 $\delta^d(x-a)$ を用いる．

デルタ超関数に対する (C.16a)～(C.16c) の描像も直観的には適切なものであることが次の命題によって示される．

---

*9 たとえば，積 $\delta(x)\delta(x)$ は意味をもたない．

命題 C.5 $\varrho \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ とし，$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x)dx = 1$ をみたすとする．任意の $\varepsilon > 0$ に対して関数 $\varrho_\varepsilon \in \mathsf{L}^1(\mathbb{R}^d)$ を

$$\varrho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^d}\varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \tag{C.18}$$

によって定義する．このとき，任意の $a \in \mathbb{R}^d$ と $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-a)f(x)dx = \delta_a(f). \tag{C.19}$$

証明 変数変換 $y = (x-a)/\varepsilon$ をすることにより，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-a)f(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(y)f(a+\varepsilon y)dy$$

明らかに，$\lim_{\varepsilon\to 0} \varrho(y)f(a+\varepsilon y) = \varrho(y)f(a)$．さらに，$|\varrho(y)f(a+\varepsilon y)| \le |\varrho(y)|\,\|f\|_\infty$ であり，この右辺は ε によらない可積分関数である．したがって，ルベーグの優収束定理により，$\varepsilon \to 0$ のとき，

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-a)f(x)dx \to \int_{\mathbb{R}^d} \varrho(y)f(a)dy = f(a).$$

ゆえに，(C.19) を得る． □

(C.19) は，関数 $\varrho_\varepsilon(\,\cdot\,-a)$ が，$\varepsilon \to 0$ のとき，超関数の意味で δ_a に収束することを示している．

命題 C.5 における関数 ϱ の例としては，たとえば，ガウス型関数

$$\varrho(x) = \frac{1}{\pi^{d/2}}e^{-x^2}$$

がある．この場合，

$$\varrho_\varepsilon(x-a) = \frac{1}{(\varepsilon^2\pi)^{d/2}}e^{-|x-a|^2/\varepsilon^2}$$

であるから，この関数のグラフは，$\varepsilon \to 0$ のとき，点 $x = a$ のところに集中してくることがわかる．

実際，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varrho_\varepsilon(x-a) = \begin{cases} 0 & ; x \ne a \\ +\infty & ; x = a \end{cases}$$

となっている．これは，ちょうど (C.16a)～(C.16c) に対応する描像である．$\varrho_\varepsilon(x-a)$ は関数としては，ほとんどいたるところ 0 に収束するのでつまらないのであるが，収束のとりかたを変えることにより，デルタ超関数という興味のある対象がつかまえられるのである．

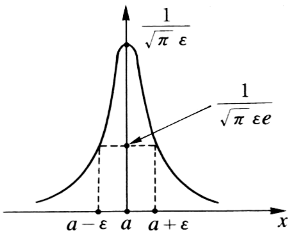


図 C.1 関数 $\varrho_\varepsilon(x-a)$ ($d=1$ の場合)

一般に，ある位相ではとらえられない対象でも別の位相ではとらえられる可能性がある．超関数論は，関数解析におけるこの基本的理念を関数の集合に適用したものにほかならない．すなわち，関数の収束の意味を変えることによって，通常の関数のクラスを含む非常に広い数学的対象がとらえられたのである．位相というのは，関数空間等，諸々の空間に存在する数学的対象をつかまえる網のようなものである．網が粗ければ取りこぼすものもある．古典解析の網（各点収束，一様収束）はある意味で粗かったのである．

デルタ超関数に関する基本的な公式をひとつ述べておこう．1 次元のデルタ超関数 δ と任意の $a \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ に対して，

$$x^n \delta_a = a^n \delta_a \tag{C.20}$$

が成り立つ（超関数核を使って書けば，$x^n\delta(x-a) = a^n\delta(x-a)$ ということ）．実際，任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，

$$(x^n\delta_a)(f) = \delta_a(x^n f) = a^n f(a) = a^n\delta_a(f).$$

(C.20) で $a=0$ の場合を考えると，

$$x^n\delta(x) = 0, \quad n \geq 1, \tag{C.21}$$

を得る．

C.3 超関数の微分

$\phi \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ならば，任意の多重指数 α に対して[*10]，部分積分公式

$$\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)\partial^\alpha f(x)dx \ = \ (-1)^{|\alpha|}\int_{\mathbb{R}^d} \partial^\alpha\phi(x)f(x)dx, \qquad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad j=1,\cdots,d, \tag{C.22}$$

[*10] 多重指数については，付録 B の B.1 節を参照．

が成り立つ．$\mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ の関数は $\mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ に属するから超関数である．(C.22) を超関数の記法で表わせば

$$\partial^\alpha \phi(f) = (-1)^{|\alpha|}\phi(\partial^\alpha f) \tag{C.23}$$

となる．超関数 ϕ の微分は，ϕ が $\mathsf{C}^m(\mathbb{R}^d)$ (m 回連続微分可能な関数の全体) のときには，$|\alpha| \le m$ なる任意の多重指数 α に対して (C.23) が成立するような仕方で定義するのが自然である．これは実際可能であって，以下のような手続きによってなされる．まず，任意の多重指数 α と $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 ϕ_α を

$$\phi_\alpha(f) = (-1)^{|\alpha|}\phi(\partial^\alpha f), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d),$$

によって定義する．$f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\partial^\alpha f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \partial^\alpha f$ であるから，ϕ_α は $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ の位相で連続である．すなわち，ϕ_α は超関数である．この超関数を $D^\alpha\phi$ と書き，これを ϕ に対する $|\alpha|$ 階の**超関数の意味での偏導関数**あるいは**導超関数**とよぶ．したがって，

$$D^\alpha \phi(f) = (-1)^{|\alpha|}\phi(\partial^\alpha f), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \tag{C.24}$$

が成り立つことになる．D^α を $|\alpha|$ 階の**超関数の意味での偏微分演算子**または $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ **上の偏微分演算子**という．

特に，$\alpha = (0, \cdots, 0, \alpha_j, 0, \cdots, 0)$ (j 成分以外は 0) の場合，

$$D^\alpha = D_j^{\alpha_j} \tag{C.25}$$

と記す．このとき，任意の多重指数 α に対して

$$D^\alpha \phi = D_1^{\alpha_1} \cdots D_d^{\alpha_d}\phi, \quad \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)', \tag{C.26}$$

が成り立つ．ここで，右辺の偏微分の順序は任意でよい．

容易にわかるように，$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ が微分可能な関数であれば，その導超関数は対応する同じ階数の偏導関数と一致する．

すでに述べたように，任意の $u \in \mathsf{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ と $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，積 $u\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ が定義された．この積に関する微分については，通常の関数の場合と同様に，ライプニッツの規則が成り立つ：

$$D_j^n(u\phi) = \sum_{r=0}^n {}_nC_r D_j^{n-r} u D_j^r \phi. \tag{C.27}$$

証明は容易だから，読者の演習とする．

量子力学において現われる，超関数の意味での偏微分演算子で基本的なものは

$$\Delta = \sum_{j=1}^{d} D_j^2 \tag{C.28}$$

によって定義される d 次元ラプラシアンである．

超関数に導超関数を対応させる写像 D^α は $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ からそれ自身への写像であり，線形であることは定義から容易にわかる．さらにこの写像は連続である．すなわち，次の定理が成り立つ．

定理 C.6 $\phi_n, \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)', \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} \phi \quad (n \to \infty)$, ならば，任意の多重指数 α に対して，$D^\alpha \phi_n \xrightarrow{\mathcal{D}'} D^\alpha \phi \ (n \to \infty)$.

証明 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ とすれば，

$$D^\alpha \phi_n(f) = (-1)^{|\alpha|} \phi_n(\partial^\alpha f) \to (-1)^{|\alpha|} \phi(\partial^\alpha f) = D^\alpha \phi(f).$$

したがって，求める結果を得る． □

例 C.1 $\mathbb{R}$ 上の関数 $|x|$ は局所可積分であるから超関数である．D_x を $\mathcal{D}(\mathbb{R})'$ 上の微分演算子とする．任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して，

$$\begin{aligned}(D_x|x|)(f) &= -|x|(f') = -\int_0^\infty x f'(x) dx + \int_{-\infty}^0 x f'(x) dx \\ &= \int_0^\infty f(x) dx - \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varepsilon(x) f(x) dx.\end{aligned} \tag{C.29}$$

ただし，$\varepsilon(x)$ は**符号関数**とよばれる関数で

$$\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & ; x > 0 \\ -1 & ; x < 0 \end{cases} \tag{C.30}$$

によって定義される[*11]．したがって，

$$D_x|x| = \varepsilon(x) \tag{C.31}$$

[*11] $\{0\} \subset \mathbb{R}$ はルベーグ測度 0 の集合であるから，(C.29) の最後の積分においては，$\varepsilon(x)$ の $x = 0$ での値が何であるかは問題にならない（したがって，この場合，$\varepsilon(0)$ はどう定義してもよい）．付録 A で注意したように，ルベーグ積分においては，扱う関数はほとんどいたるところ定義されていれば十分なのである．

を得る.

同様にして

$$D_x^2|x| = D_x\varepsilon(x) = 2\delta(x) \tag{C.32}$$

を証明できる. 実際, 任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ に対して, (C.31) により,

$$\begin{aligned}(D_x^2|x|)(f) &= -(D_x|x|)(f') = -\int_{\mathbb{R}} \varepsilon(x)f'(x)dx \\ &= -\int_0^\infty f'(x)dx + \int_{-\infty}^0 f'(x)dx = 2f(0) = 2\delta(f).\end{aligned}$$

したがって, $D_x|x|^2 = 2\delta$.

例 C.2 $x \geq 0$ ならば $\theta(x) = 1$, $x < 0$ ならば $\theta(x) = 0$ によって定義される関数 θ を**ヘヴィサイド** (Heavisude) **関数**という. これは, 局所可積分関数であから超関数である. この関数の超関数の意味での微分を求めてみよう. 任意の $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$(D_x\theta)(f) = -\theta(f') = -\int_0^\infty f'(x)dx = f(0) = \delta(f).$$

したがって,

$$D_x\theta(x) = \delta(x). \tag{C.33}$$

例 C.3 $\mathbf{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ とし, Δ を超関数の意味での 2 次元ラプラシアンとする. このとき, 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して, 超関数の等式

$$\Delta \log|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = 2\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \tag{C.34}$$

が成り立つ*[12].

例 C.4 **デルタ超関数の微分**. 任意の自然数 n と $j = 1, \cdots, d,$ に対して

$$(D_j^n\delta_a)(f) = (-1)^n\delta_a(\partial_j^n f) = (-1)^n(\partial_j^n f)(a), \quad f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d).$$

一般に, 超関数 $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$ の台が何個かの点の集合 $\{a_1, \cdots, a_n\} \subset \mathbb{R}^d$ に等しいとき, ϕ は点 $a_1, \cdots, a_n,$ に**集中している**という.

たとえば, デルタ超関数 δ_a とそのすべての導超関数は点 a に集中している. したがって, それらの有限一次結合も点 a に集中している. 実は, この逆も成り立つ*[13].

*[12] 証明については, たとえば, L. シュワルツ『物理数学の方法』(岩波書店) の 2 章, 定理 6 を参照.

*[13] 証明については, たとえば, I. M. Gel'fand and G. E. Shilov: *Generalized Functions* Vol.II (Academic Press, 1968) の 2 章 4.5 節を参照. 簡単な場合については, L. シュワルツ『物理数学の方法』(岩波書店) の 2 章, 定理 8 を参照.

定理 C.7　$\mathbb{R}^d$ 上の超関数 ϕ が点 a に集中しているとする．このとき，ϕ は，δ_a とその導超関数 $D^\alpha \delta_a$ の有限一次結合で表わされる．すなわち，定数 $C_\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して，

$$\phi = \sum_\alpha C_\alpha D^\alpha \delta_a$$

と書ける．ただし，右辺の多重指数が動く範囲は有限である（この範囲は ϕ ごとに定まる）．

C.4　緩増加超関数

超関数のうちで，その定義域を $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ よりも広い空間に拡大できるものが存在する．そのような超関数を以下に定義する．付録 B で $\mathbb{R}^d$ 上の急減少関数の空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を導入した．この空間にも $\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ の位相とは異なる位相を定義できる．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，非負整数 m と多重指数 α とによって指定される量 $\|f\|_{m,\alpha}$ を

$$\|f\|_{m,\alpha} = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1+|x|)^m |\partial^\alpha f(x)| \tag{C.35}$$

によって定義する．これが有限であることは容易にわかる．$\|\cdot\|_{m,\alpha}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上のひとつのノルムである．ノルムの系 $\{\|\cdot\|_{m,\alpha}\}_{m,\alpha}$ を用いて，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に位相が導入される．すなわち，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の関数列 $\{f_n\}_n$ が $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に収束するとは，すべての非負整数 m とすべての多重指数 α に対して，$\|f_n - f\|_{m,\alpha} \to 0$ $(n \to \infty)$ が成り立つことと定義するのである．このことを $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ とも記す．次の事実は基本的である．

命題 C.8　$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ において稠密である．すなわち，任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ の関数列 f_n が存在して $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ となる．

証明　概略だけを示す．次の三つの条件をみたす関数 $\varrho \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ をひとつ固定する：(i) $0 \le \varrho(x) \le 1$, $x \in \mathbb{R}^d$; (ii) $|x| \le 1/2$ ならば $\varrho(x) = 1$; (iii) $|x| \ge 1$ ならば $\varrho(x) = 0$．$n = 1, 2, \cdots,$ に対して，$\varrho_n(x) = \varrho(x/n)$ とし，$f_n = \varrho_n f$ とおく．このとき，$f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ であり，

$$\begin{aligned}\partial^\alpha f_n \;=\; & \sum_{k_1=0}^{\alpha_1} \cdots \sum_{k_d=0}^{\alpha_d} {}_{\alpha_1}C_{k_1} \cdots {}_{\alpha_d}C_{k_d} n^{-|k_1|-\cdots-|k_d|} \\ & \times (\partial^{k_1+\cdots+k_d}\varrho)(x/n)(\partial^{\alpha-k_1-\cdots-k_d} f)(x)\end{aligned}$$

に注意すれば，$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ となることがわかる．　□

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の連続線形汎関数を**緩増加超関数** (tempered distribution) という．すなわち，ϕ が緩増加超関数であるとは，それが $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathbb{C}$ への写像であって，次の二つの条件をみたすときをいう：

(i) （線形性）$\phi(\lambda f + \mu g) = \lambda\phi(f) + \mu\phi(g), \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \lambda, \mu \in \mathbb{C}.$

(ii) （連続性） $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\phi(f_n) \to \phi(f)$ $(n \to \infty)$.

緩増加超関数の全体を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ または $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ と記す．

$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ とし，$f_n, f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ が $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} f \quad (n \to \infty)$ をみたすとしよう．このとき，$K \subset \mathbb{R}^d$ を $(\cup_n \mathrm{supp}\, f_n) \cup \mathrm{supp}\, f \subset K$ なる有界閉集合とすれば，任意の非負整数 m と多重指数 α に対して

$$
\begin{aligned}
\|f_n - f\|_{m,\alpha} &\le \sup_{x\in K}(1+|x|)^m \sup_{x\in K}|\partial^\alpha(f_n(x) - f(x))| \\
&\to 0 \ (n \to \infty)
\end{aligned}
$$

となるので，$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$. したがって，$\phi(f_n) \to \phi(f)$ $(n \to \infty)$. ゆえに，$\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)'$. こうして

$$
\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)' \tag{C.36}
$$

という包含関係が成り立つことがわかる．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数が緩増加超関数であるための必要十分条件は次の定理によってあたえられる．

定理 C.9 ϕ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数とする．このとき，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ であるための必要十分条件は，ある非負整数の有限個の組 $m_1, \cdots, m_n$ と多重指数の組 $\alpha^{(1)}, \cdots, \alpha^{(n)}$ および定数 $C > 0$ が存在して，不等式

$$
|\phi(f)| \le C \sum_{j=1}^{n} \|f\|_{m_j, \alpha^{(j)}}, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{C.37}
$$

が成り立つことである．

証明 $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 ϕ が (C.37) をみたせば，ϕ が連続になるので，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ である．条件の必要性の証明は省略する． □

例 C.5 $\mathbb{R}$ 上の関数 $\phi(x) = e^{x^4}$ は超関数であるが緩増加ではない．なぜなら，$f(x) = e^{-x^2}$ とすれば，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ であるが，

$$
\phi(f) = \int_{\mathbb{R}} e^{x^4} e^{-x^2}\, dx = +\infty.
$$

となるからである．この例が暗示するように，一般に，無限遠での増大度が指数関数的な連続関数は緩増加超関数にならないのである．

例 C.6 $\mathbb{R}$ 上の単項式 $\phi(x) = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}$ 上の緩増加超関数である．実際，$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とすれば，

$$\begin{aligned}|\phi(f)| &\le \int_{\mathbb{R}} |x|^n |f(x)| dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} \cdot (1+x^2)|x|^n |f(x)| dx \\ &\le C(\|f\|_{n,0} + \|f\|_{n+2,0}).\end{aligned}$$

ただし，$C = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{1+x^2} dx < \infty$．したがって，定理 C.9 によって，$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ である．

$\mathbb{R}^d$ 上の関数 h が**多項式的に有界** (polynomially bounded) であるとは，ある自然数 m と定数 C が存在して，$|h(x)| \le C(1+|x|^m)$, $x \in \mathbb{R}^d$, が成り立つ場合をいう．前段と同様にして，**$\mathbb{R}^d$ 上の任意の多項式的に有界なボレル可測関数は緩増加超関数**であることが示される．

例 C.7 任意の $a \in \mathbb{R}^d$ と $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\delta_a(f) = f(a)$ と定義する．これはデルタ超関数の定義域を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に拡大したものである．容易にわかるように，$|\delta_a(f)| = |f(a)| \le \|f\|_{0,0}$．したがって，$\delta_a$ は緩増加超関数である．

定理 C.10 $1 \le p \le \infty$ としよう．このとき，$\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$.

証明 $\phi \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d), f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\phi(f) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) f(x) dx$ とおく．ヘルダーの不等式を用いると $|\phi(f)| \le \|\phi\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} \|f\|_{\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)}$．ただし，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$．一方，

$$\begin{aligned}\|f\|^q_{\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)} &= \int \frac{1}{(1+|x|^{d+1})^q} \left\{(1+|x|^{d+1})|f(x)|\right\}^q dx \\ &\le C(|f|_{0,0} + |f|_{d+1,0})^q.\end{aligned}$$

ここで，$C = \int_{\mathbb{R}^d} (1+|x|^{d+1})^{-q} dx < \infty$．したがって，

$$|\phi(f)| \le \|\phi\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)} C^{1/q} (\|f\|_{0,0} + \|f\|_{d+1,0}).$$

これは，写像 $f \to \phi(f)$ が $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の位相で連続であることを意味する（定理 C.9）．□

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の列 $\{\phi_n\}_n$ が $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に収束することを

$$\phi_n(f) \to \phi(f) \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

によって定義し，これを $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} f$ $(n \to \infty)$ とも記す．これによって，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に位相が導入され，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ は位相線形空間になる．

$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の列 $\{\phi_n\}_n$ について，すべての $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\{\phi_n(f)\}_n$ が $\mathbb{C}$ のコーシー列であるとき，$\{\phi_n\}_n$ を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の**コーシー列**あるいは**基本列**という．

定理 C.11　$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の任意のコーシー列は収束列である．すなわち，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の任意の列 $\{\phi_n\}_n$ に対して，$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \phi \quad (n \to \infty)$ となる $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ が存在する．

この定理に述べられた性質は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ の**完備性**とよばれる．

C.5　緩増加超関数のフーリエ変換

$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 $\hat{\phi}$ を

$$\hat{\phi}(f) = \phi(\hat{f}), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{C.38}$$

によって定義する．ただし，$\hat{f}$ は f のフーリエ変換である（付録 B を参照）．付録 B で示したように，$\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ であるから，$\hat{\phi}$ は確かに $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数である．$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad (n \to \infty)$ ならば，$\hat{f}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} \hat{f}$ を示すのは難しくない．したがって，$\hat{\phi}(f_n) \to \hat{\phi}(f) \quad (n \to \infty)$ となる．ゆえに，$\hat{\phi}$ は連続である．よって，$\hat{\phi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$．この緩増加超関数 $\hat{\phi}$ を ϕ の**フーリエ変換**という．

$\phi \in \mathsf{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ならば，パーセヴァルの等式により，(C.38) が成り立つので，(C.38) はフーリエ変換の $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ への自然な拡張とみることができる．このことを考慮して，

$$\hat{\phi} = \mathcal{F}\phi, \quad \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)', \tag{C.39}$$

とも記す．

次の定理は重要である．

定理 C.12　フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ からそれ自身への全単射であり，連続線形写像である．

証明　$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，$\mathcal{F}\phi = \hat{\phi} = 0$ とすれば，すべての $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\phi(\hat{f}) = 0$ である．$\mathcal{F}$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の全射であったから，すべての $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\phi(g) = 0$ となる．したがって，$\phi = 0$. ゆえに $\mathcal{F}$ は 1 対 1 である．

任意の $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，写像 $\psi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{C}$ を

$$\psi(f) = \phi(\check{f}), \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{C.40}$$

によって定義すれば，$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の連続性により，$\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ であることがわかる．さらに，$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ の全射性を用いると，(C.40) は $\hat{\psi}(f) = \phi(f)$, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, と等価になる．これは，$\mathcal{F}\psi = \phi$ を意味するので，$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ は全射であることが結論される．

$\phi_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \phi \quad (n \to \infty)$ とすれば，$\hat{\phi}_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} \hat{\phi} \ (n \to \infty)$ となる．ゆえに，$\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)' \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ は連続性である．□

$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に対して，(C.40) によって定義される緩増加超関数 ψ を ϕ の**逆フーリエ変換**といい，

$$\psi = \check{\phi} = \mathcal{F}^{-1}\phi \tag{C.41}$$

と記す．

C.6 基本的な緩増加超関数のフーリエ変換

C.6.1 デルタ超関数のフーリエ変換

任意の $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ と $a \in \mathbb{R}^d$ に対して，

$$\begin{aligned}\hat{\delta}_a(f) &= \delta_a(\hat{f}) = \hat{f}(a) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int e^{-iak} f(k) dk.\end{aligned}$$

ゆえに，デルタ超関数のフーリエ変換 $\hat{\delta}_a$ は関数と同一視でき，

$$\hat{\delta}_a(k) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} e^{-iak} \tag{C.42}$$

となる．

C.6.2 単項式のフーリエ変換

$\mathbb{R}$ 上の超関数 $\phi(x) = x^n$ のフーリエ変換を求めてみよう．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とすれば，$\hat{\phi}(f) = \phi(\hat{f}) = \int_{\mathbb{R}} x^n \hat{f}(x) dx$．一方，

$$\begin{aligned}x^n \hat{f}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} i^n \frac{d^n e^{-ikx}}{dk^n} f(k) dk \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{\mathbb{R}} (-i)^n e^{-ikx} \frac{d^n f(k)}{dk^n} dk \\ &= (-i)^n (\mathcal{F} f^{(n)})(x).\end{aligned}$$

したがって，

$$\hat{\phi}(f) = (2\pi)^{1/2} (-i)^n f^{(n)}(0) = (2\pi)^{1/2} (-i)^n \delta_0(f^{(n)}) = (2\pi)^{1/2} i^n \delta_0^{(n)}(f).$$

ゆえに，

$$\mathcal{F} x^n = (2\pi)^{1/2} i^n \delta_0^{(n)}(x). \tag{C.43}$$

すなわち，単項式 x^n のフーリエ変換はデルタ超関数の n 階の導超関数に比例する．

C.6.3　$\mathbb{R}^d$ 上の関数 $(k^2+1)^{-1}$ のフーリエ変換

関数 $(k^2+1)^{-1}$ $(k \in \mathbb{R}^d)$ は緩増加超関数である（$d \geq 2$ ならば，可積分ではないことに注意）．この超関数のフーリエ変換

$$G = \mathcal{F}((k^2+1)^{-1}) \tag{C.44}$$

を求めよう．これは，超関数方程式

$$(-\Delta+1)G(f) = \delta(f) \tag{C.45}$$

をみたす．

$d=1$ の場合は，留数定理を応用することにより，

$$G(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}, \tag{C.46}$$

となることは容易にわかる．

$d \geq 2$ の場合は，次の定理が成り立つ．

定理 C.13　$d \geq 2$ とする．このとき，G は関数と同一視でき，

$$G(x) = G(x;d) := \frac{1}{2^{d/2}}\int_0^\infty t^{-d/2}\exp\left(-t-\frac{x^2}{4t}\right)dt \tag{C.47}$$

という表示をもつ．さらに，以下の (i)～(iii) が成立する．

(i)　$G(x;d) > 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, であり，$G(x;d)$ は $|x|$ の単調減少関数である．

(ii)　任意の $R > 0$ に対して，定数 $C_R > 0$ が存在して，$|x| \geq R$ ならば

$$G(x;d) \leq C_R|x|^{-(d-2)/2}e^{-|x|}. \tag{C.48}$$

(iii)　十分小さな $\delta > 0$ に対して，定数 $C_j > 0, j = 1, 2,$ が存在して，$|x| < \delta$ ならば

$$C_1|x|^{-d+2} \leq G(x;d) \leq C_2|x|^{-d+2} \qquad (d \geq 3 \text{ のとき}), \tag{C.49a}$$

$$C_1|\ \log|x|\ | \leq G(x;d) \leq C_2|\ \log|x|\ | \qquad (d = 2 \text{ のとき}). \tag{C.49b}$$

証明　$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ とすれば，

$$G(f) = \int \frac{\hat{f}(k)}{k^2+1}dk.$$

ここで，

$$\frac{1}{k^2+1}=\int_0^\infty e^{-k^2t}e^{-t}dt$$

と書けることに注意すれば，

$$G(f)=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^\infty e^{-k^2t}e^{-t}dt\right)\hat{f}(k)dk. \tag{C.50}$$

そこで，

$$|\hat{f}(k)|e^{-k^2t}e^{-t}\leq|\hat{f}(k)|e^{-t}$$

に注意して，フビニの定理を応用すれば，(C.50) の右辺の積分順序の交換ができて，

$$G(f)=\int_0^\infty dte^{-t}\int_{\mathbb{R}^d}dk\hat{f}(k)e^{-k^2t}$$

を得る．変数 $k\in\mathbb{R}^d$ の関数 e^{-k^2t} $(t>0)$ のフーリエ変換 $\mathcal{F}e^{-k^2t}$ が

$$(\mathcal{F}e^{-k^2t})(x)=\frac{1}{(2t)^{d/2}}e^{-x^2/4t},\quad x\in\mathbb{R}^d, \tag{C.51}$$

となることを証明するのは困難ではない．これとパーセヴァルの等式により

$$\int_{\mathbb{R}^d}dk\hat{f}(k)e^{-k^2t}=\frac{1}{(2t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-x^2/4t}dx$$

が得られる．したがって，

$$G(f)=\int_0^\infty dte^{-t}\frac{1}{(2t)^{d/2}}\int_{\mathbb{R}^d}f(x)e^{-x^2/4t}dx.$$

ここでまた積分順序を交換するために，次のことに注意する：

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d}t^{-d/2}|f(x)|e^{-x^2/4t}dx &= \int_{\mathbb{R}^d}|f(\sqrt{t}y)|e^{-y^2/4}dy\\ &\leq C\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

ただし，$C=\int_{\mathbb{R}^d}e^{-y^2/4}dy=(2\sqrt{\pi})^d<\infty$．したがって，累次積分

$$\int_0^\infty dt\,e^{-t}(2t)^{-d/2}\int_{\mathbb{R}^d}|f(x)|e^{-x^2/4t}dx$$

は有限である．ゆえに，フビニの定理が応用できるので，

$$G(f)=\int_{\mathbb{R}^d}\left(\int_0^\infty\frac{1}{(2t)^{d/2}}e^{-t}e^{-x^2/4t}dt\right)f(x)dx$$

となる．ゆえに，(C.47) を得る（$G(x;d)$ が局所可積分であることは容易にわかる）．

$G(x;d)$ に関する性質 (i) は，(C.47) から明らかであろう．

(C.48) を示すために，$x \neq 0$ として，(C.47) において，変数変換 $s = t/|x|$ をすれば

$$|x|^{(d-2)/2}G(x;d) = I_1(x) + I_2(x)$$

と書ける．ここで，

$$\begin{aligned} I_1(x) &= \int_0^{1/2}(2s)^{-d/2}e^{-h(s)|x|}ds, \quad I_2(x) = \int_{1/2}^{\infty}(2s)^{-d/2}e^{-h(s)|x|}ds, \\ h(s) &= s + \frac{1}{4s}, \quad s > 0. \end{aligned}$$

関数 $h(s)$ は，$(0, 1/2]$ で単調減少，$[1/2, \infty)$ で単調増大であり，$h(s) \geq h(1/2) = 1$ である．そこで，変数変換 $h(s) = t$ を行なうと，$|x| \geq R > 0$ ならば，任意の $\delta > 0$ に対して，

$$\begin{aligned} e^{|x|}I_1(x) &= \frac{1}{2}\int_1^{\infty}\frac{e^{-(t-1)|x|}}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}}dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_1^{1+\delta}\frac{e^{-(t-1)|x|}}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}}dt \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{1+\delta}^{\infty}\frac{e^{-(t-1)|x|}}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}}dt \\ &\leq \frac{1}{2}\int_1^{1+\delta}\frac{1}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}}dt \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_{1+\delta}^{\infty}\frac{e^{-(t-1)R}}{\sqrt{t^2-1}(t-\sqrt{t^2-1})^{(d-2)/2}}dt < \infty. \end{aligned}$$

したがって，$e^{|x|}I_1(x)$ は $|x| \geq R$ で有界な関数である．同様にして，$e^{|x|}I_2(x)$ も $|x| \geq R$ で有界であることが示される．以上から，$|x|^{(d-2)/2}e^{|x|}G(x;d)$ は $|x| \geq R$ で有界であることがわかる．ゆえに，(C.48) が成立する．

(C.47) で変数変換 $s = |x|^2/t$ を行なうと

$$|x|^{d-2}G(x;d) = 2^{-d/2}\int_0^{\infty}s^{(d-4)/2}e^{-s/4}e^{-x^2/s}ds.$$

被積分関数は，$s^{(d-4)/2}e^{-s/4}e^{-x^2/s} \leq s^{(d-4)/2}e^{-s/4}$ と評価される．$d \geq 3$ ならば，右辺は可積分関数である．したがって，ルベーグの優収束定理により，

$$\lim_{x\to 0}|x|^{d-2}G(x;d) = 2^{-d/2}\int_0^{\infty}s^{(d-4)/2}e^{-s/4}ds > 0.$$

ゆえに，(C.49a) を得る．

$d=2$ の場合は,

$$G(x;d)=\int_0^\infty \frac{e^{-|x|h(s)}}{2s}ds.$$

変数変換 $r=|x|h(s)$ をすれば

$$G(x;d)=\int_{|x|}^\infty \frac{e^{-r}}{\sqrt{r^2-|x|^2}}dr.$$

したがって, $|x|<\delta$ とすれば

$$\begin{aligned}G(x;d) &\geq e^{-\delta}\int_{|x|}^{\delta}\frac{1}{\sqrt{r^2-|x|^2}}dr\\ &= e^{-\delta}\left(-\log|x|+\log(\delta+\sqrt{\delta^2-|x|^2})\right).\end{aligned}$$

同様に,

$$G(x;d)\leq \int_{|x|}^{\delta}\frac{1}{\sqrt{r^2-|x|^2}}dr+\frac{1}{\sqrt{\delta^2-|x|^2}}\int_{\delta}^{\infty}e^{-r}dr.$$

これらの式から (C.49b) が得られる. □

積分表示 (C.47) は変形ベッセル関数 K_ν を用いて

$$G(x;d)=|x|^{-(d-2)/2}K_{(d-2)/2}(|x|) \tag{C.52}$$

と表わされる[*14]. 上の証明は, ベッセル関数 $K_{(d-2)/2}$ のいくつかの性質を調べたことになる.

特に, (C.52) と変形ベッセル関数の性質により, $d=3$ の場合は,

$$G(x;3)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{e^{-|x|}}{|x|} \tag{C.53}$$

となる[*15].

C.6.4 $\mathbb{R}^d$ 上の関数 $k_j(k^2+1)^{-1}$ のフーリエ変換

前項の結果を用いて, 関数 $k_j(k^2+1)^{-1}, j=1,\cdots,d,$ のフーリエ変換

$$G_j:=\mathcal{F}(k_j(k^2+1)^{-1}) \tag{C.54}$$

---

*14 たとえば, 森口繁一 他『数学公式 III』(岩波書店) の第3章, p.187 を参照.

*15 前掲書の p.172 を参照. この場合, 関数 $(k^2+1)^{-1}$ は $\mathsf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ であるから, L^2 関数としてのフーリエ変換を計算すればよい.

を求めてみよう．次の式変形は容易である：

$$\begin{aligned} G_j(f) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{k_j \hat{f}(k)}{k^2+1} dk = (-i) \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\mathcal{F}\partial_j f)(k)}{k^2+1} dk = (-i) G(\partial_j f) \\ &= (-i) \int_{\mathbb{R}^d} G(x;d) \partial_j f(x) dx. \end{aligned} \tag{C.55}$$

したがって，

$$G_j = iD_j G(\,\cdot\,; d). \tag{C.56}$$

この右辺を計算するために，$\tilde{x} = (x_1, \cdots, x_{j-1}, x_{j+1}, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1}$ として，定数 $\varepsilon \in \mathbb{R}$ に対して，関数 $G_\varepsilon(\tilde{x}) = G(x_1, \cdots, \varepsilon, \cdots, x_d; d)$ を導入する．$G(x;d)$ は $|x|$ のみに依存する関数であるから，$G_\varepsilon = G_{-\varepsilon}$ が成り立つ．$G(x;d)$ が $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ では無限回微分可能であることを示すのはそれほど難しくはない（付録 A の定理 A.8 を応用すればよい．あるいは (C.52) とベッセル関数の性質を用いればよい）．したがって，(C.55) は次のように書き直せる：$\varepsilon > 0$ として，

$$\begin{aligned} G_j(f) &= (-i) \lim_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_\varepsilon^\infty G(x;d) \partial_j f(x) dx_j \right) d\tilde{x} \right. \\ &\qquad \left. + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} G(x;d) \partial_j f(x) dx_j \right) d\tilde{x} \right\} \\ &= i \lim_{\varepsilon \to 0} (I_\varepsilon + J_\varepsilon). \end{aligned}$$

ただし，

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} G_\varepsilon(\tilde{x}) \left\{ f(x_1, \cdots, \varepsilon, \cdots, x_d) - f(x_1, \cdots, -\varepsilon, \cdots, x_d) \right\} d\tilde{x} \\ J_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_\varepsilon^\infty [\partial_j G(x;d)] f(x) dx_j \right) d\tilde{x} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} [\partial_j G(x;d)] f(x) dx_j \right) d\tilde{x}. \end{aligned}$$

定理 C.12 によって，

$$0 < G(x;d) \le Cr(x) e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$

ただし，$C > 0$ は定数で，

$$r(x) = \begin{cases} 1 + |x|^{-d+2} & ; d \ge 3 \text{ のとき} \\ 1 + |\ \log |x|\ | & ; d = 2 \text{ のとき} \end{cases}.$$

したがって，C とは別の定数 C' があって，

$$0 < G_\varepsilon(\tilde{x}) \le C'(1 + r(|\tilde{x}|))e^{-|\tilde{x}|}$$

が成立する．$\mathbb{R}^{d-1}$ 上の可積分関数であるから，ルベーグの優収束定理により，$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = 0$ となることがわかる．したがって，

$$G_j(f) = i \lim_{\varepsilon\to 0} J_\varepsilon = i \int_{\mathbb{R}^d} [\partial_j G(x;d)] f(x) dx$$

を得る．(C.52) とベッセル関数の漸化式

$$zK'_\nu(z) + \nu K_\nu(z) = -zK_{\nu-1}(z)$$

を用いると

$$\begin{aligned}\partial_j G(x;d) &= -x_j|x|^{-(d+2)/2}\{(d-2)K_{(d-2)/2}(|x|) + |x|K_{(d-4)/2}(|x|)\},\\ &\quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\end{aligned}$$

となる．したがって，G_j は関数

$$\begin{aligned}G_j(x) &= i\partial_j G(x;d)\\ &= -ix_j|x|^{-(d+2)/2}\{(d-2)K_{(d-2)/2}(|x|) + |x|K_{(d-4)/2}(|x|)\},\end{aligned} \tag{C.57}$$

と同一視できる．(C.52) を使えば，

$$G_j(x) = -ix_j|x|^{-2}\{(d-2)G(x;d) + G(x;d-2)\} \tag{C.58}$$

という関係式が成立する．こうして，

$$\begin{aligned}&(\mathcal{F}(k_j(k^2+1)^{-1}))(x)\\ &= -ix_j|x|^{-(d+2)/2}\{(d-2)K_{(d-2)/2}(|x|) + |x|K_{(d-4)/2}(|x|)\},\end{aligned} \tag{C.59}$$

が得られる．

C.7 合　成　積

$f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，関数 $f * g$ を

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)g(y)dy \tag{C.60}$$

によって定義し，これを f と g の**合成積** (convolution) という．合成積の基本的性質は次の定理にまとめられる：

定理 C.14

(i) 各 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，写像 $g \to f * g$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ への連続線形写像である．

(ii)

$$\widehat{fg} = (2\pi)^{-d/2}\hat{f} * \hat{g}, \quad \widehat{f * g} = (2\pi)^{d/2}\hat{f}\hat{g},$$
$$f * g = g * f, \quad f * (g * h) = (f * g) * h, \quad f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d).$$

合成積は，もっと広いクラスの関数 f, g に対しても定義されうる．実際，$f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d), g \in \mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)$ $(1 \le p, q \le \infty)$ ならば，(C.60) によって $f * g$ は定義され，$f * g \in \mathsf{L}^r(\mathbb{R}^d)$ であることが示される．ただし，$p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$ である．この場合，ヤング (Young) の不等式（付録 D を参照）が $\|f * g\|_{\mathsf{L}^r(\mathbb{R}^d)}$ に対する最良の評価をあたえる．

合成積は次のようにして緩増加超関数と急減少関数に対しても定義される．$f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，$\tilde{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ を $\tilde{f}(x) = f(-x)$ によって定義する．$\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ としよう．このとき，定理 C.14(i) のおかげで，

$$(\phi * f)(g) = \phi(g * \tilde{f}), \quad g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \tag{C.61}$$

によって定義される，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ 上の線形汎関数 $\phi * f$ は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ に属する．これを ϕ と f の**合成積**という．

各 $y \in \mathbb{R}^d$ に対して関数 f_y を $f_y(x) = f(y - x)$ によって定義する．

定理 C.15 各 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ に対して，写像 $\phi \to \phi * f$ は，$\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ から $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)'$ への連続線形写像である．さらに，次の諸性質が成り立つ：

(i) 緩増加超関数 $\phi * f$ は多項式的に有界な無限回連続微分可能な関数と同一視でき，

$$(\phi * f)(y) = \phi(f_y), \quad y \in \mathbb{R}^d,$$

が成り立つ．さらに，任意の多重指数 α に対して

$$D^\alpha(\phi * f) = (D^\alpha \phi) * f = \phi * D^\alpha f.$$

(ii) $\widehat{\phi * f} = (2\pi)^{d/2}\hat{\phi}\hat{f}$.

(iii) $(\phi * f) * g = \phi * (f * g), \quad f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

C.8 フリードリクスの軟化演算子

関数 $\varrho \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ で，条件

$$\varrho(x) \geq 0, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad |x| \geq 1 \text{ ならば } \varrho(x) = 0,$$
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varrho(x)dx = 1,$$

をみたすものを任意にひとつ選び，$\varepsilon > 0$ に対して，関数 ϱ_ε を (C.18) によって定義する．関数の族 $\{\varrho_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ を**軟化子**という．容易にわかるように，$\varrho_\varepsilon \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d), \varrho_\varepsilon(x) \geq 0$ であり，

$$|x| \geq \varepsilon \text{ ならば } \varrho_\varepsilon(x) = 0, \quad \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x)dx = 1,$$

が成立する．$f \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ ならば，

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varrho_\varepsilon(x-y)f(y)|dy \leq \frac{\|\varrho\|_\infty}{\varepsilon^d} \int_{|x-y|\leq\varepsilon} |f(y)|dy < \infty$$

であるから，演算子 J_ε が

$$(J_\varepsilon f)(x) = (\varrho_\varepsilon * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \varrho_\varepsilon(x-y)f(y)dy \tag{C.62}$$

によって定義される．この演算子を**フリードリクスの軟化演算子** (mollifier) という．これは次の有用な性質をもっている．

定理 C.16 (i) $f \in \mathsf{L}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$ が有界な台 K をもつならば，$J_\varepsilon f \in \mathsf{C}_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ であって，$J_\varepsilon f$ の台は，K を ε だけふくらませた集合 $K_\varepsilon := \{x = x_1 + x_2 | x_1 \in K, |x_2| \leq \varepsilon\}$ に含まれる．

(ii) $f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ ならば，$J_\varepsilon f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ であり

$$\|J_\varepsilon f\|_p \leq \|f\|_p, \quad 1 \leq p \leq \infty, \tag{C.63}$$
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|J_\varepsilon f - f\|_p = 0, \quad 1 \leq p < \infty \tag{C.64}$$

が成り立つ．

(iii) f が $\mathbb{R}^d$ 上で有界かつ一様連続ならば，

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \|J_\varepsilon f - f\|_\infty = 0. \tag{C.65}$$

証明　(i) $J_\varepsilon f$ の台の特性は，実質的な積分範囲を考察することにより，容易にわかる．$J_\varepsilon f$ の微分可能特性を示すには，付録 A の定理 A.8 を応用すればよい．

(ii) ヤングの不等式（付録 D を参照）によって，$\|J_\varepsilon f\|_p \leq \|\varrho_\varepsilon\|_1 \|f\|_p = \|f\|_p$. (C.64) については，たとえば，黒田成俊『関数解析』（共立出版）の §6.2 を参照されたい．

(iii) 仮定によって，任意の $\delta > 0$ に対して，定数 $\varepsilon_0 > 0$ があって，$|x-y| < \varepsilon_0$ ならば，$|f(x) - f(y)| < \delta$. 一方，

$$J_\varepsilon f(x) - f(x) = \int_{|x-y| \leq \varepsilon} \varrho_\varepsilon(x-y)(f(y) - f(x))dy$$

と書けるから，$\varepsilon < \varepsilon_0$ ならば，$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} |J_\varepsilon f(x) - f(x)| \leq \delta$. これは，(C.65) を意味する．□

付録D 基本的な不等式

この付録では，読者の便宜のために，L^p 空間論やフーリエ解析で用いられる基本的な不等式を採録しておく．

1. ヘルダー (Hölder) の不等式[*1]. (X,μ) を測度空間とする．条件 $1 \le p,q,r \le \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = r^{-1}$ をみたす任意の p,q,r とすべての $f \in \mathsf{L}^p(X,d\mu)$, $g \in \mathsf{L}^q(X,d\mu)$ に対して，$fg \in \mathsf{L}^r(X,d\mu)$ であり，

$$\|fg\|_{\mathsf{L}^r(X,d\mu)} \le \|f\|_{\mathsf{L}^p(X,d\mu)} \le \|g\|_{\mathsf{L}^q(X,d\mu)}$$

が成り立つ．

2. ハウスドルフ-ヤング (Hausdorff-Young) の不等式[*2]. 条件 $1 \le p \le 2$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$ をみたす任意の p,q とすべての $f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)$ に対して，f の超関数の意味でのフーリエ変換 $\hat{f}$ は $\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)$ に属し，

$$\|\hat{f}\|_{\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)} \le (2\pi)^{(d/2\,-\,d/p)}\|f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)}$$

が成り立つ．

3. ヤングの不等式[*3]. 条件 $1 \le p,q,r \le \infty$, $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$ をみたす任意の p,q,r とすべての $f \in \mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d), g \in \mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)$ に対して，$f * g \in \mathsf{L}^r(\mathbb{R}^d)$ であり，

$$\|f * g\|_{\mathsf{L}^r(\mathbb{R}^d)} \le \|f\|_{\mathsf{L}^p(\mathbb{R}^d)}\|g\|_{\mathsf{L}^q(\mathbb{R}^d)}$$

が成り立つ．

[*1] 証明については，たとえば，伊藤清三『ルベーグ積分入門』（裳華房）の pp.165–166 を参照.

[*2] 証明については，たとえば，M. Reed and B. Simon: *Methods of Modern Mathematical Physics*, vol.I, (Academic Press, 1972) の p.11(Theorem IX.8) を参照.

[*3] 証明については，たとえば，黒田成俊『関数解析』（共立出版）の p.97 を参照.

索　　引

第 I 巻：1～242 頁，第 II 巻：243～476 頁，付録 (1)～(64).

ア　行

カ　行

サ　行

タ　行

ナ　行

ハ　行

マ 行

ヤ 行

ラ　行

ワ　行

著者略歴

新井朝雄（あらい あさお）

1954 年　埼玉県に生まれる
1979 年　東京大学大学院
　　　　　理学研究科修士課程修了
現　在　北海道大学大学院
　　　　　理学研究科数学専攻教授
　　　　　理学博士

江沢　洋（えざわ ひろし）

1932 年　東京都に生まれる
1960 年　東京大学大学院
　　　　　数物系研究科博士課程修了
現　在　学習院大学理学部教授
　　　　　理学博士

朝倉物理学大系 7
量子力学の数学的構造 I　　定価はカバーに表示

1999 年 7 月 10 日　初版第 1 刷

著　者　新　井　朝　雄
　　　　江　沢　　　洋
発行者　朝　倉　邦　造
発行所　株式会社　朝　倉　書　店
東京都新宿区新小川町 6-29
郵便番号　162-8707
電　話　03 (3260) 0141
FAX　03 (3260) 0180
http://www.asakura.co.jp

〈検印省略〉

三美印刷・渡辺製本

ISBN 4-254-13677-3　C 3342　　Printed in Japan